Analisi della tensione e della deformazione - esercizio svolto

Date le tensioni di contatto $\mathbf{t}_i$ = (-2; -2) su una superficie di normale **i** e $\mathbf{t}_j$ = (-2; -1) su una superficie di normale **j** si chiede di:

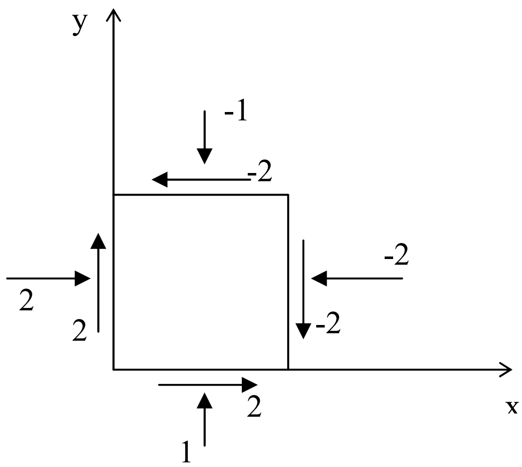
1. scrivere il tensore della tensione **T**;
2. rappresentare graficamente le tensioni su un elemento quadrato infinitesimo con lati paralleli agli assi x e y;
3. valutare la tensione $\mathbf{t}_n$ su una superficie di normale $\mathbf{n} = \left(\sqrt{2}/2; \sqrt{2}/2\right)$;
4. determinare le componenti normale e tangenziale di $\mathbf{t}_n$ e specificare se $\mathbf{t}_n$ è una tensione principale;
5. scrivere il tensore della deformazione **E** considerando un corpo lineare elastico, omogeneo ed isotropo di assegnate costanti elastiche *E* e ν.
6. determinare la deformazione volumetrica;
7. rappresentare graficamente la deformazione di un quadrato con lati paralleli agli assi x e y.

punto 1

Gli elementi del tensore della tensione sono le componenti delle tensioni che agiscono sulle superfici di normale **i** e **j**, la prima colonna è composta dalle componenti della tensione che agisce sulla superficie di normale **i**, mentre la seconda colonna è data dalle componenti della tensione che agisce sulla superficie di normale **j**. Nel caso in esame si può scrivere immediatamente il tensore della tensione **T**

$$\mathrm{T} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$$

punto 2



punto 3

$$\mathrm{t}_n = \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} n_x + \begin{pmatrix} \tau_{yx} \\ \sigma_y \end{pmatrix} n_y = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix} \sqrt{2}/2 + \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix} \sqrt{2}/2 = \begin{pmatrix} -2\sqrt{2} \\ -3\sqrt{2}/2 \end{pmatrix}$$

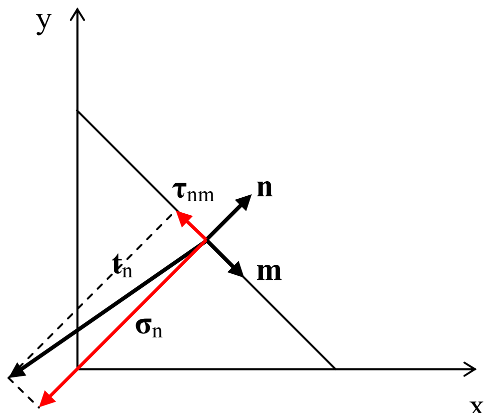
punto 4

La componente normale di $\mathbf{t}_n$, ovvero la componente di $\mathbf{t}_n$ parallela ad $\mathbf{n}$ è data dal prodotto scalare di $\mathbf{t}_n$ per $\mathbf{n}$, mentre la componente tangenziale è data dal prodotto scalare di $\mathbf{t}_n$ per $\mathbf{m}$ (vdr. figura).

componente normale: $$\sigma_n = \mathrm{t}_n \cdot \mathrm{n} = \begin{pmatrix} -2\sqrt{2} \\ -3\sqrt{2}/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \end{pmatrix} = -3.5$$

componente tangenziale: $$\tau_{nm} = \mathrm{t}_n \cdot \mathrm{m} = \begin{pmatrix} -2\sqrt{2} \\ -3\sqrt{2}/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 \end{pmatrix} = -0.5$$

la tensione $\mathbf{t}_n$ non è una tensione principale poiché ha componente tangenziale diversa da zero



punto 5

Le componenti del tensore della deformazione si ottengono, note le tensioni, tramite le equazioni di Navier:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left(\sigma_x - \nu\sigma_y\right) = \frac{1}{E}\left(-2+\nu\right)$$
$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}\left(\sigma_y - \nu\sigma_x\right) = \frac{1}{E}\left(-1+2\nu\right)$$
$$\gamma_{xy} = \gamma_{yx} = \frac{\tau_{xy}}{G} = \frac{-2}{G} = \frac{-4(1+\nu)}{E}$$

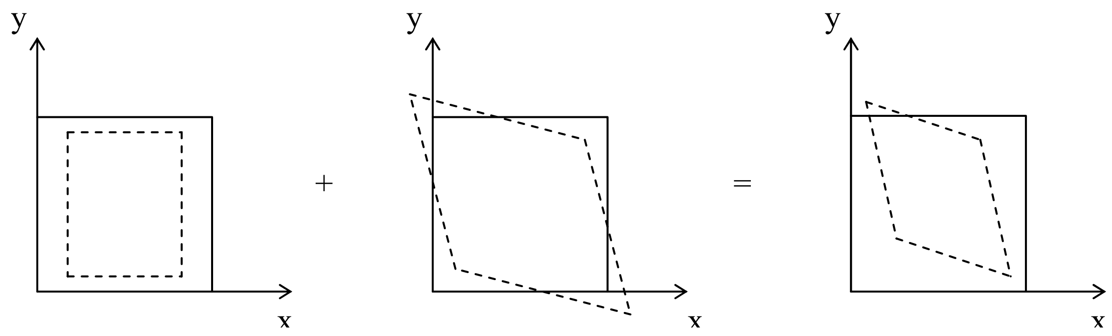
$$\mathrm{E} = \begin{pmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{yx} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_y \end{pmatrix} = \frac{1}{E}\begin{pmatrix} -2+\nu & -2(1+\nu) \\ -2(1+\nu) & -1+2\nu \end{pmatrix}$$

punto 6
La deformazione volumetrica è data dalla somma degli elementi della diagonale principale, quindi

$$\frac{\Delta V}{V_o} = \varepsilon_x + \varepsilon_y = -3 + 3\nu$$

considerando che per i materiali comuni il coefficiente di Poisson (ν) è compreso tra 0 e 0.5, si può notare che la deformazione volumetrica è negativa, si ha pertanto una riduzione di volume, coerentemente con lo stato di tensione rappresentato in figura (punto 2).

punto7
Rappresentazione qualitativa della configurazione deformata



deformazione normale + deformazione tangenziale = deformazione totale