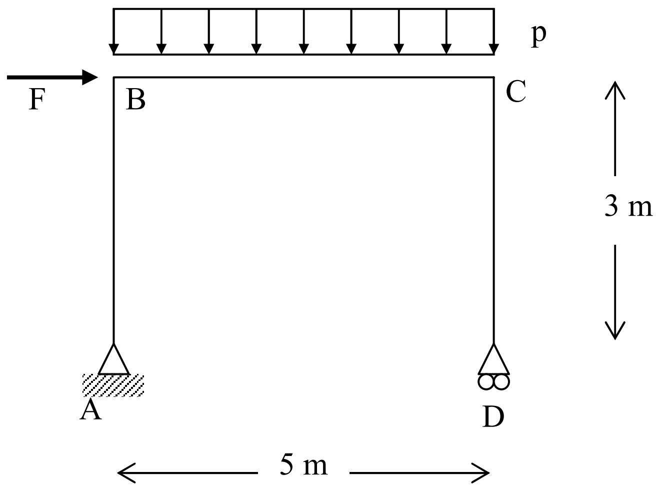
Esonero 09/06/06 (gruppo 1)

Esercizio n. 1

Il telaio rappresentato in figura è composto da elementi in acciaio con sezione HE 120 B. E' soggetto ad un carico ripartito p = 1 t/m e ad una forza orizzontale F = 2 t.



1. Tracciare il diagramma del taglio, indicando i valori significativi.
2. Disegnare i diagrammi delle tensioni tangenziali nella sezione maggiormente sollecitata a taglio, indicando i valori massimi e minimi.
3. Scrivere il tensore della tensione nel baricentro della sezione di mezzeria della trave.

Soluzione

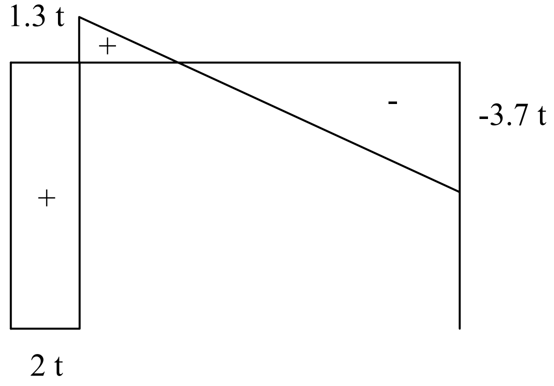
1. Per tracciare il diagramma del taglio occorre determinare le reazioni vincolari, il sistema è composto da un solo corpo ed ha 3 gradi di vincolo, quindi è isostatico e sono sufficienti le tre equazioni di equilibrio:

$\sum F_x = 0$ $\quad$ $R_{Ax} = 2$ t verso sinistra

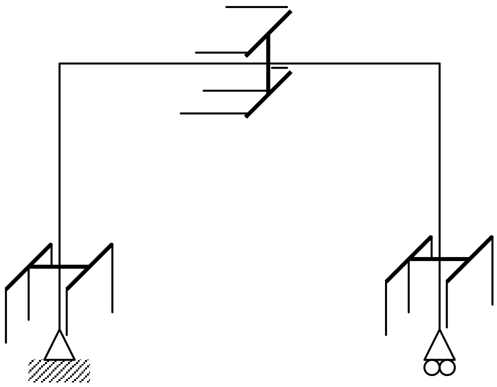
$\sum M_A = 0$ $\quad$ $- 2 \cdot 3 - 5 \cdot 2.5 + R_D \cdot 5 = 0 \rightarrow R_D = 3.7$ t verso l'alto

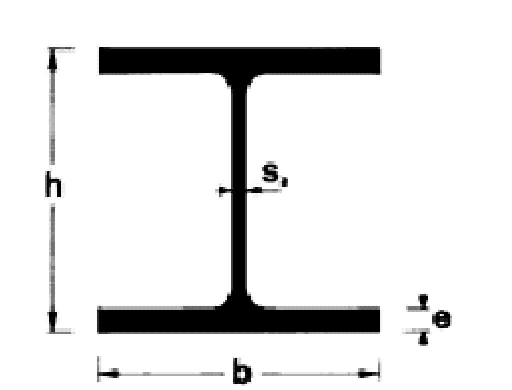
$\sum F_y = 0$ $\quad$ $R_{Ay} = 1.3$ t verso l'alto

Diagramma del taglio



2. Il taglio massimo, in valore assoluto, è quindi pari a 3700 kg.





$T_y = 3700$ kg
$h = 12$ cm
$b = 12$ cm
$s_a = 0.65$ cm
$e = 1.1$ cm
$I_x = 864$ cm^4

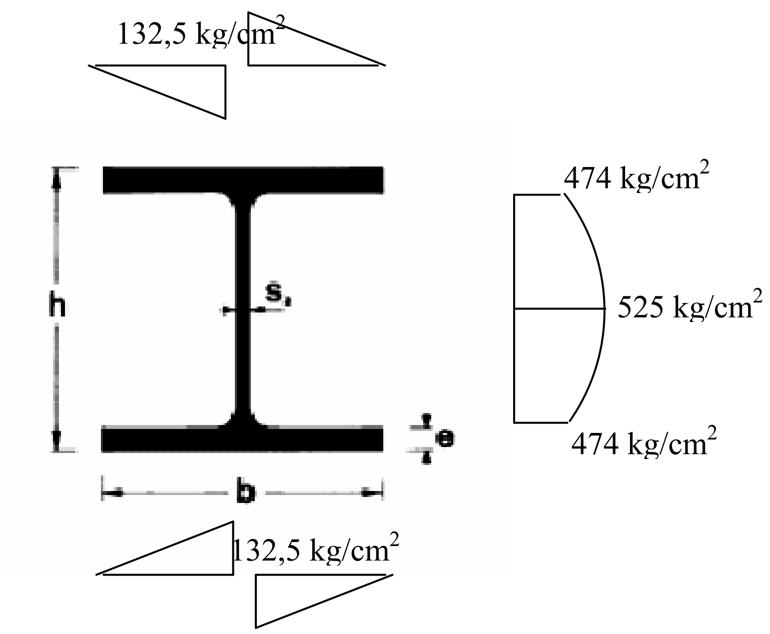
anima

$$\tau_{min} = \frac{3700 \cdot (12 \cdot 1{,}1 \cdot 5{,}45)}{864 \cdot 0{,}65} = \frac{3700 \cdot 71{,}94}{864 \cdot 0{,}65} \cong 474\ \text{kg/cm}^2$$

$$\tau_{max} = \frac{3700 \cdot (71{,}94 + 4{,}9 \cdot 0{,}65 \cdot 2{,}45)}{864 \cdot 0{,}65} = \frac{3700 \cdot 79{,}74}{864 \cdot 0{,}65} \cong 525\ \text{kg/cm}^2$$

ali

$$\tau_{max} = \frac{3700 \cdot (1{,}1 \cdot 5{,}675 \cdot 5{,}45)}{864 \cdot 1{,}1} = \frac{3700 \cdot 34{,}02}{864 \cdot 1{,}1} \cong 132{,}5\ \text{kg/cm}^2$$



3. Nella sezione di mezzeria della trave lo sforzo normale è nullo mentre il taglio è pari a 1200 kg, quindi nella fibra baricentrica

$\sigma_z = 0$

$$\tau_{yz} = \frac{1200 \cdot 79{,}74}{864 \cdot 0{,}65} \cong 170\ \mathrm{kg/cm^2}$$

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 170 \\ 0 & 170 & 0 \end{pmatrix} \mathrm{kg/cm^2}$$

Esercizio n. 2

Dato uno stato di tensione piano, individuato dal tensore della tensione nel riferimento xy

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

1. determinare le tensioni principali e le direzioni principali.
2. scrivere il modulo della tensione agente sulla superficie corrispondente alla tensione tangenziale massima.

Soluzione

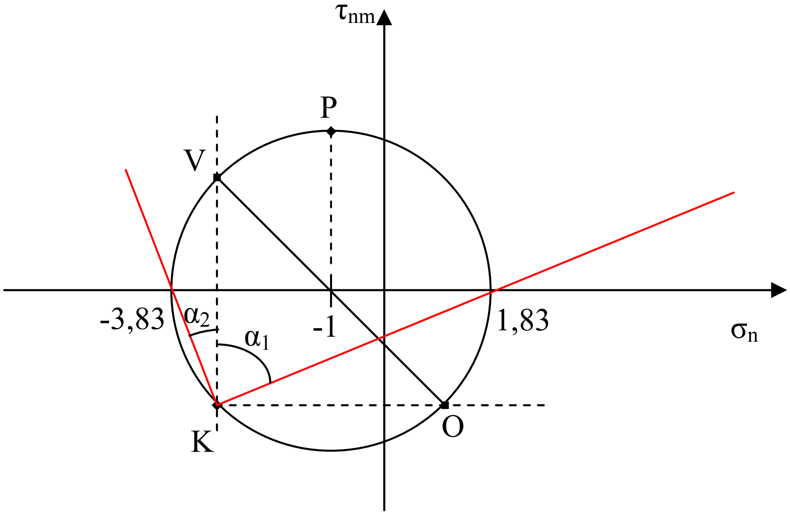
1. Tensioni e direzioni principali

$$\sigma_1 = \frac{-3+1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{(-3-1)^2 + 4\cdot(-2)^2} = -1 + 2{,}83 = 1{,}83$$

$$\sigma_2 = \frac{-3+1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{(-3-1)^2 + 4\cdot(-2)^2} = -1 - 2{,}83 = -3{,}83$$

V = (-3; 2)

O = (1; -2)



$$\alpha_1 = \text{arctg}\left(\frac{3+1.83}{2}\right) = 67{,}5°$$

$$\alpha_2 = 90 - 67{,}5 = 22{,}5°$$

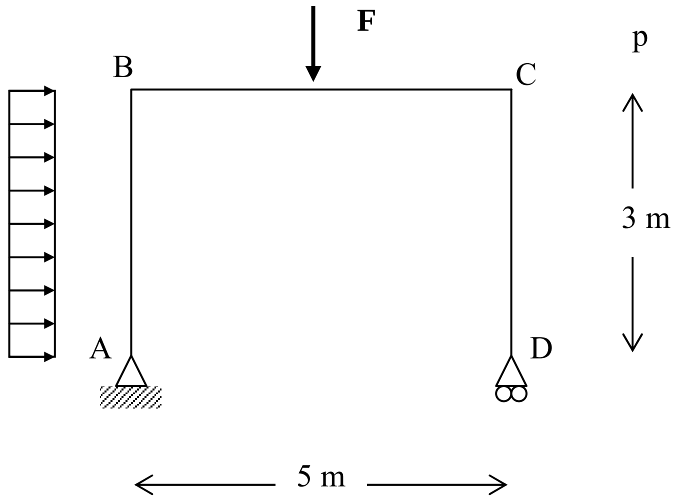
2. La massima tensione tangenziale si ha nel punto P di coordinate (σ_n; τ_{nm}) = (-1; 2,83), pertanto il modulo della tensione vale

$$|t_n| = \sqrt{1^2 + 2{,}83^2} = 3$$

Esonero 09/06/06 (gruppo 2)

Esercizio n. 1

Il telaio rappresentato in figura è composto da elementi in acciaio con sezione HE 120 A. E' soggetto ad un carico ripartito p = 1 t/m e ad una forza verticale F = 3 t applicata nella mezzeria della trave.



1. Tracciare il diagramma del taglio, indicando i valori significativi.
2. Disegnare i diagrammi delle tensioni tangenziali nella sezione maggiormente sollecitata a taglio, indicando i valori massimi e minimi.
3. Scrivere il tensore della tensione nel baricentro della sezione A.

Soluzione

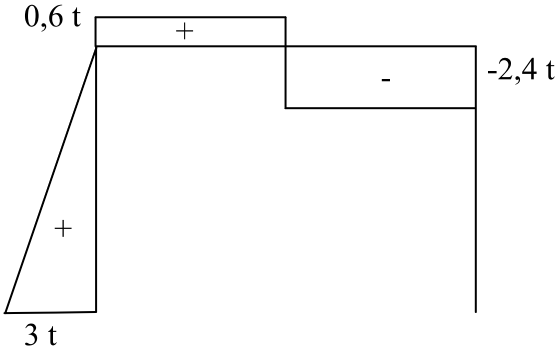
1. Per tracciare il diagramma del taglio occorre determinare le reazioni vincolari, il sistema è composto da un solo corpo ed ha 3 gradi di vincolo, quindi è isostatico e sono sufficienti le tre equazioni di equilibrio:

$\sum F_x = 0$ $R_{Ax} = 3$ t verso sinistra

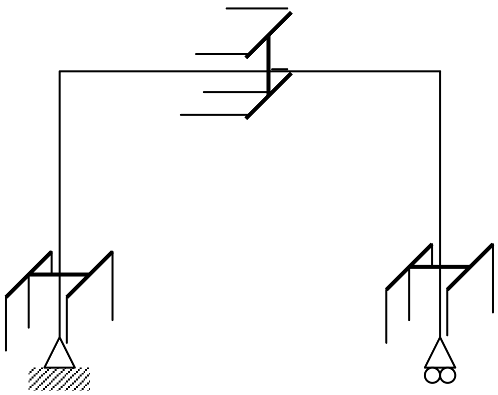
$\sum M_A = 0$ $- 3 \cdot 1{,}5 - 3 \cdot 2.5 + R_D \cdot 5 = 0 \rightarrow R_D = 2{,}4$ t verso l'alto

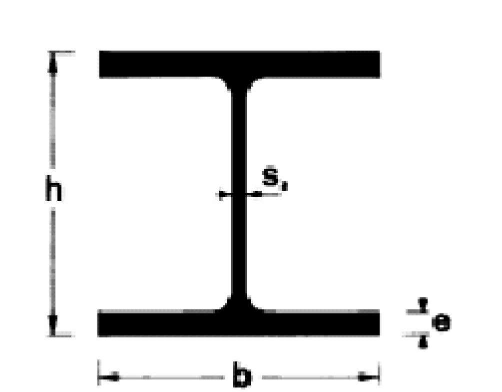
$\sum F_y = 0$ $R_{Ay} = 0{,}6$ t verso l'alto

Diagramma del taglio



2. Il taglio massimo è quindi pari a 3000 kg.





$T_y = 3000$ kg
$h = 11{,}4$ cm
$b = 12$ cm
$s_a = 0{,}5$ cm
$e = 0{,}8$ cm
$I_x = 606$ cm^4

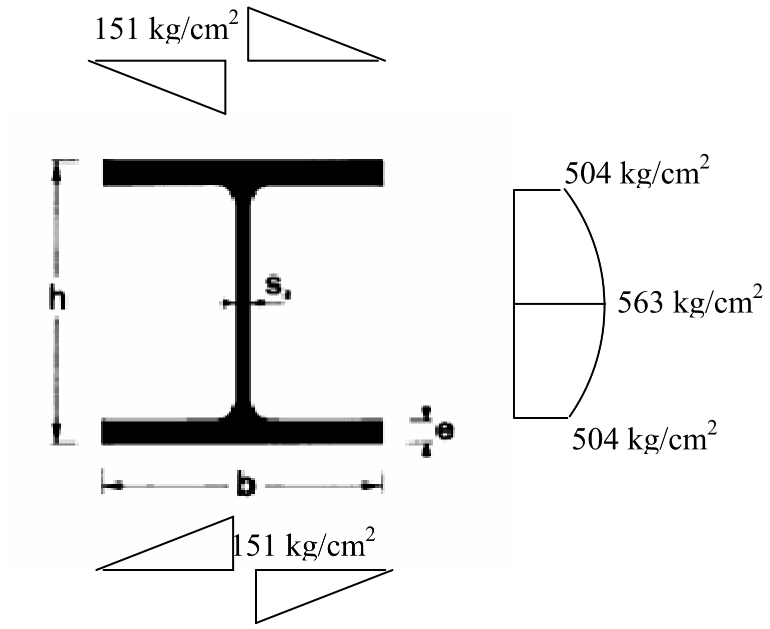
<u>anima</u>

$$\tau_{min} = \frac{3000 \cdot (12 \cdot 0{,}8 \cdot 5{,}3)}{606 \cdot 0{,}5} = \frac{3000 \cdot 50{,}88}{606 \cdot 0{,}5} \cong 504\ \text{kg/cm}^2$$

$$\tau_{max} = \frac{3000 \cdot (50{,}88 + 4{,}9 \cdot 0{,}5 \cdot 2{,}45)}{606 \cdot 0{,}5} = \frac{3000 \cdot 56{,}88}{606 \cdot 0{,}5} \cong 563\ \text{kg/cm}^2$$

<u>ali</u>

$$\tau_{max} = \frac{3000 \cdot (5{,}75 \cdot 0{,}8 \cdot 5{,}3)}{606 \cdot 0{,}8} = \frac{3000 \cdot 24{,}38}{606 \cdot 0{,}8} \cong 151\ \text{kg/cm}^2$$



3. Nella sezione A agiscono il taglio T_y = 3000 kg e lo sforzo normale N = - R_{Ay} = - 600 kg, allora

$$\sigma_z = \frac{N}{A} = \frac{-600}{25{,}3} = -23{,}7 \text{ kg/cm}^2$$

$$\tau_{yz} = 563 \text{ kg/cm}^2$$

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 563 \\ 0 & 563 & -23{,}7 \end{pmatrix} \text{kg/cm}^2$$

Esercizio n. 2

Dato uno stato di tensione piano, individuato dal tensore della tensione nel riferimento xy

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & -6 \end{pmatrix}$$

1. determinare le tensioni principali e le direzioni principali.
2. scrivere il modulo della tensione agente sulla superficie verticale.

Soluzione

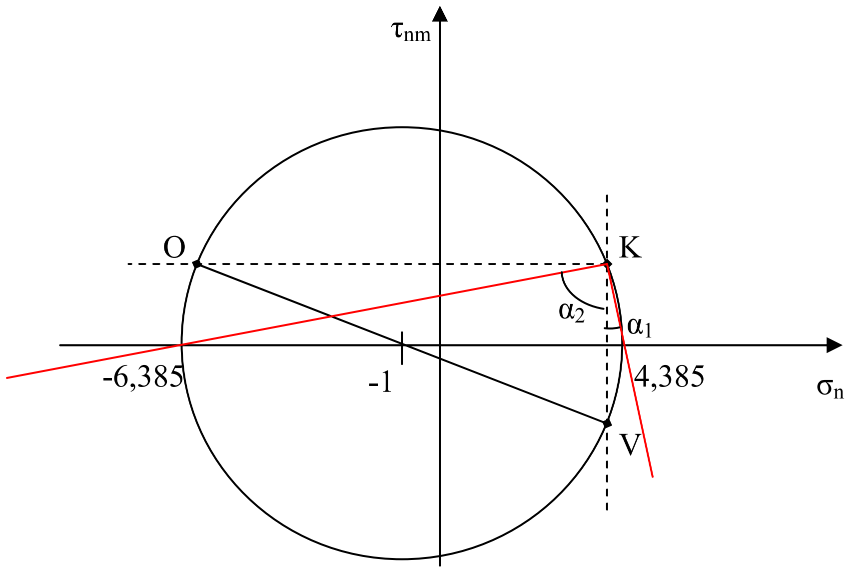
1. Tensioni e direzioni principali

$$\sigma_1 = \frac{4-6}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{(4+6)^2 + 4\cdot(2)^2} = -1 + 5{,}385 = 4{,}385$$

$$\sigma_2 = \frac{4-6}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{(4+6)^2 + 4\cdot(2)^2} = -1 - 5{,}385 = -6{,}385$$

V = (4; -2)

O = (-6; 2)



$$\alpha_1 = \mathrm{arctg}\left(\frac{4{,}385-4}{2}\right) = 10{,}9°$$

$$\alpha_2 = 90 - 10{,}9 = 79{,}1°$$

2. Su una superficie verticale (normale coincidente con il versore i) agiscono le tensioni:

$\sigma_n = \sigma_x = 4$

$\tau_{nm} = \tau_{xy} = 2$

allora

$$|t_n| = \sqrt{4^2 + 2^2} = 4{,}47$$