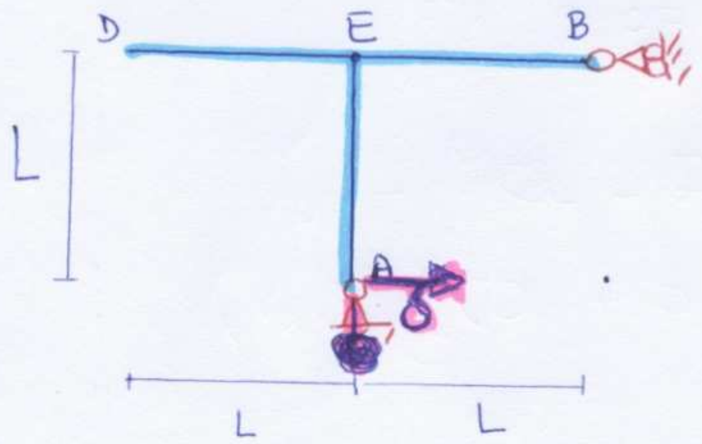
ESERCIZIO: (METODO ANALITICO E GRAFICO)

Dato il sistema in figura ed assegnato il cedimento δ:

1) Risolvere il problema cinematico
2) Disegnare la configurazione variata ed i diagrammi dei campi di spostamento.
3) Determinare la matrice cinematica
4) Determinare le coordinate del centro di rotazione.



$L = 2\,m$

$\delta = 0.01\,m$

METODO ANALITICO

PASSO 1 Determinare i gradi di libertà n e la molteplicità totale dei vincoli m.

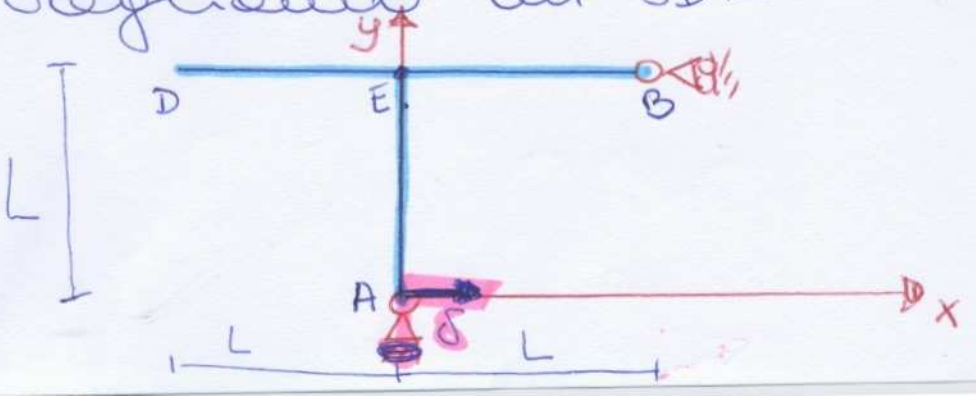
$$n = \underbrace{3}_{\text{g.d.l. corpo rigido nel piano}} \times \underbrace{1}_{\text{n° corpi rigidi (travi) che compongono la struttura}} = 3$$

$$m = \underbrace{2}_{\text{molteplicità cerniera in A}} + \underbrace{1}_{\text{molteplicità carrello in B}} = 3$$

$\boxed{m = n}$ ⇒ se i vincoli sono "BEN DISPOSTI" ($\det \underline{A} \neq 0$) il sistema è ISOCINEMATICO

PASSO 2 Scegliere un SDR (con origine in uno dei punti in cui è applicato un vincolo esterno)

Scegliamo un SDR con origine in A:



$\boxed{\text{PASSO 3}}$: Una volta scelto il SDR sappiamo che le incognite del problema cinematico sono i 3 parametri Lagrangiani.

$\underbrace{u_A, v_A}$ e φ → angolo di rotazione

Componenti dello spostamento del punto di origine del SDR

$\boxed{\text{PASSO 4}}$: Scrivere le Eq. di vincolo in funzione dei 3 parametri Lagrangiani.

Le eq. di vincolo sono:

CERNIERA IN A: $\boxed{\begin{cases} u_A = 0 \\ v_A = -\delta \end{cases}}$ CARRELLO IN B: $\begin{cases} \boxed{u_B = 0} \end{cases}$

Queste 2 eq. sono già scritte in termini dei 3 par. Lag.

queste eq. deve essere riscritta in termini di u_A, v_A e φ usando le FGSR per il punto B:

Le FGSR scritte x il punto B:

$\bar{u}_B = \bar{u}_A + \underline{\underline{R}} \cdot \begin{pmatrix} x_B \\ y_B \end{pmatrix}$ ovvero per componenti:

$\begin{pmatrix} u_B \\ v_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_A \\ v_A \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -\varphi \\ \varphi & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_B \\ y_B \end{pmatrix}$ con $\boxed{\begin{matrix} x_B = L \\ y_B = L \end{matrix}}$ (v. figura

Il sistema ammette un'unica soluzione se e solo se $\det \underline{\underline{A}} = 0$

Calcoliamo il determinante della matrice cinematica:

$$\det \underline{\underline{A}} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -L \end{vmatrix} = 1(-L) = -L \neq 0$$

Abbiamo dimostrato che $\det \underline{\underline{A}} \neq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ il sistema (*) ammette un'unica soluzione $\Rightarrow$ i vincoli sono "BEN DISPOSTI" $\Rightarrow$ la struttura è ISOCINEMATICA!

Passo 6: Noto che esiste la soluzione, la possiamo calcolare:

$u_A = \delta$

$v_A = 0$

$$u_A - \varphi L = 0 \Rightarrow \delta - \varphi L = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \varphi = \delta / L$$

La SOLUZIONE È:

$$\boxed{\begin{array}{c|c} u_A = \delta & \multirow{2}{*}{$\varphi = \dfrac{\delta}{L}$} \\ \hline v_A = 0 & \end{array}}$$

$\boxed{\text{Passo 7:}}$ Nota la soluzione, calcolare gli spostamenti di altri punti della trave per mezzo della FGSR e disegnare la configurazione variata

In particolare, x lo spostamento del punto B sappiamo che:

$\underline{u_B = 0}$, mentre per la componente verticale (vedi eq.(a) pag.3) si ha

$$v_B = \cancel{v_A} + \varphi L = \frac{\delta}{\cancel{L}} \cdot \cancel{L} = \underline{\delta = v_B}$$

Invece per il punto D si ha:

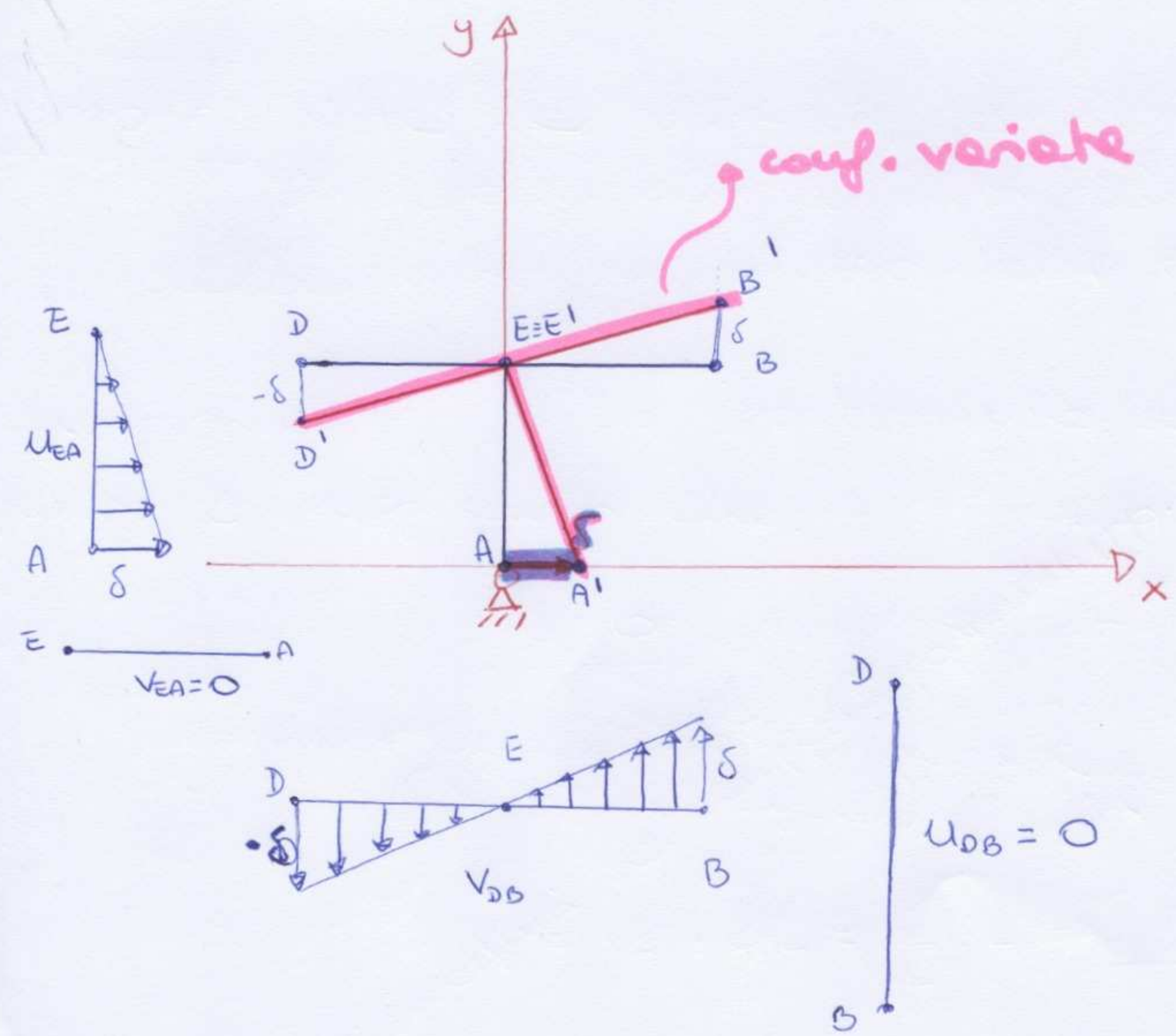
$$\overline{u}_D = \overline{u}_A + \underline{\underline{R}} \cdot \begin{pmatrix} x_D \\ y_D \end{pmatrix}$$

con $x_D = -L$
$y_D = L$

per cui:

$$\begin{pmatrix} u_D \\ v_D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -\delta/L \\ \delta/L & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -L \\ L \end{pmatrix} \text{ ovvero}$$

$$\begin{pmatrix} u_D \\ v_D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta - \frac{\delta}{L} L \\ \frac{\delta}{L}(-L) + 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\delta \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} u_D = 0 \\ v_D = -\delta \end{cases}$$



Passo 8: Determinare le coordinate del centro di rotazione.

Il centro di rotazione coincide con il punto E per cui $\begin{cases} x_c = 0 \\ y_c = L \end{cases}$

Questo si ritrova anche con le FGSR:

$$\bar{u}_c = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \bar{u}_A + \underline{\underline{R}} \cdot \begin{pmatrix} x_c \\ y_c \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x_c = -\dfrac{v_A}{\varphi} = 0 \\ y_c = \dfrac{u_A}{\varphi} = \delta \cdot \dfrac{L}{\delta} = L \end{cases}$$

METODO GRAFICO

Passo 0: $n = m = 3$

Passo 1: Identificare graficamente il centro di ~~rotazione~~ istantanea rotazione

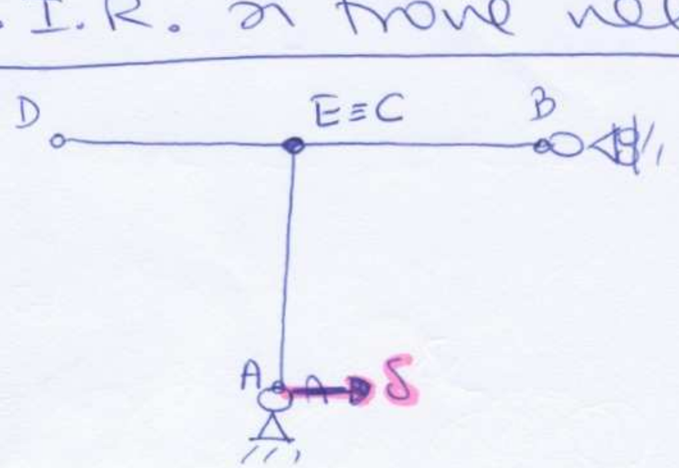
Sappiamo che:

- Il punto A si sposta in orizzontale di una quantità δ $\Rightarrow$ il C.I.R appartiene alla retta $\perp \delta$ e passante per A.

- Il carrello in B consente solo spostamenti verticali $\Rightarrow$ il C.I.R. appartiene alla retta orizzontale passante per B

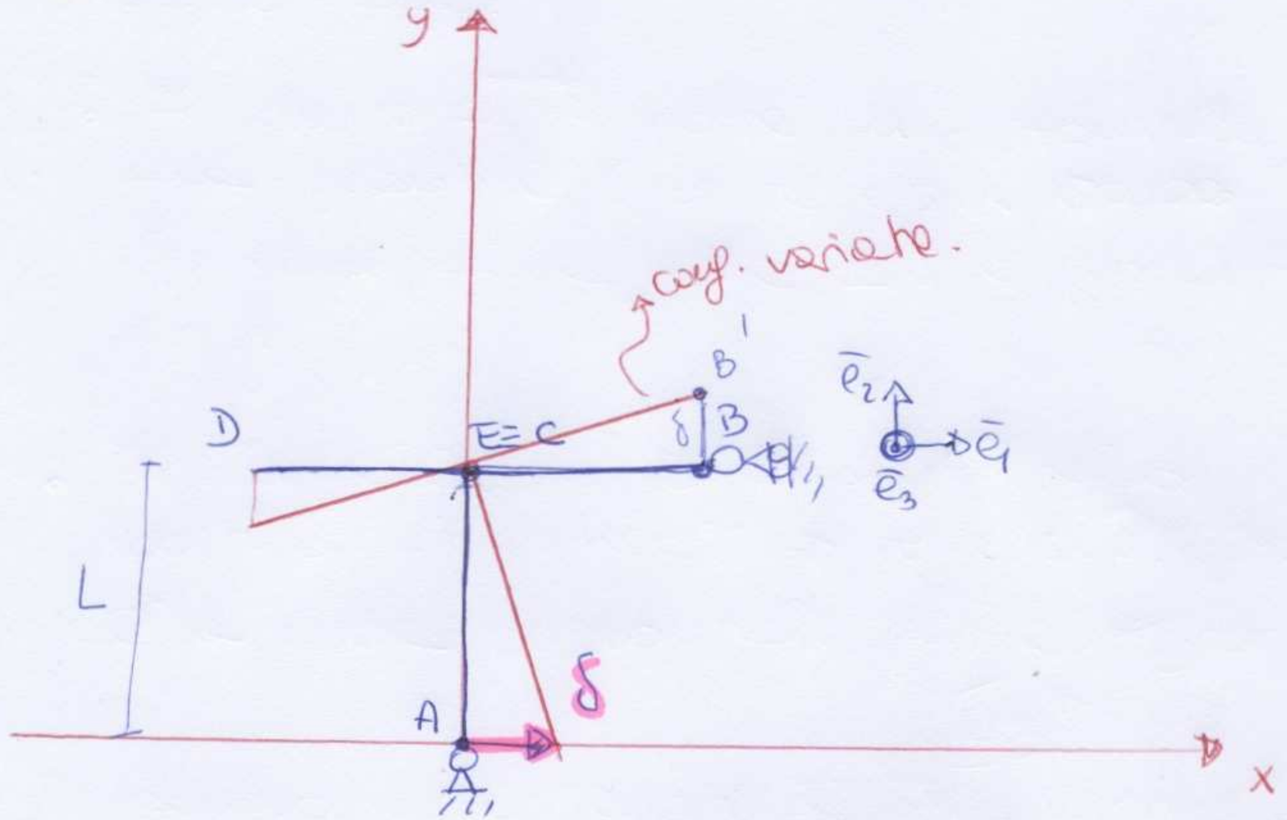
$\Rightarrow$ Dovendo appartenere alla verticale per A ed all'orizzontale per B il C.I.R. si trova nel punto di intersezione di queste due rette $\Rightarrow$

il C.I.R. si trova nel punto E



Passo 2: Scegliere il SDR con origine in un punto del corpo rigido (dove è applicato un vincolo esterno).

Scegliamo un SDR con origine in A:



Passo 3: Determinare l'ampiezza dell'angolo di rotazione φ; i

Sappiamo che per ogni punto P della trave vale la formula equivalente alla FGSR:

$$\boxed{\bar{u}_P = \varphi\, \overline{PC} \times \bar{e}_3} \quad (*)$$

dove C è il C.I.R.

È chiaro che, nota la posizione del ~~punto~~ C.I.R. C e lo spostamento del punto P è noto anche φ tramite l'eq. ⊛.

Quindi scriviamo la ⊛ per un punto di cui è noto lo spostamento, ad es. per il punto A di cui sappiamo che:

$$\bar{u}_A = \delta \bar{e}_1 + 0\,\bar{e}_2 = \delta \bar{e}_1$$

Scrivendo la ⊛ per il punto A si ha dunque:

$$\bar{u}_A = \delta \bar{e}_1 = \varphi\, \overline{AC} \times \bar{e}_3$$

È chiaro (v. figura) che $\overline{AC} = L\bar{e}_2$ x cui:

$$\underline{\delta \bar{e}_1} = \varphi L \bar{e}_2 \times \bar{e}_3 = \underline{\varphi L \bar{e}_1} \Rightarrow$$

$$\boxed{\varphi = \frac{\delta}{L}}$$

Passo 4: Nota l'ampiezza dell'angolo φ possiamo usare la ⊛ per determinare ~~ampiezza~~ lo spostamento di altri punti della trave.

Ad esempio:

$$\overline{u}_B \underset{\substack{\uparrow \\ \text{vincolo} \\ \text{carrello}}}{=} \cancel{u_B}\,\overline{e}_1 + v_B \overline{e}_2 = \varphi\, \overline{BC} \times \overline{e}_3$$

$\overline{BC} = L(-\overline{e}_1)$ per cui:

$$\underline{v_B \overline{e}_2} = -\frac{\delta}{L} L\, \overline{e}_1 \times \overline{e}_3 = \underline{\delta\, \overline{e}_2} \Rightarrow$$

$$v_B = \delta$$

→ Noto come si sposta il punto A, come si sposta il punto D e nota la posizione del C.I.R. posso agevolmente disegnare la conf. variata (pag (B))