

Il metodo degli elementi finiti – generalità

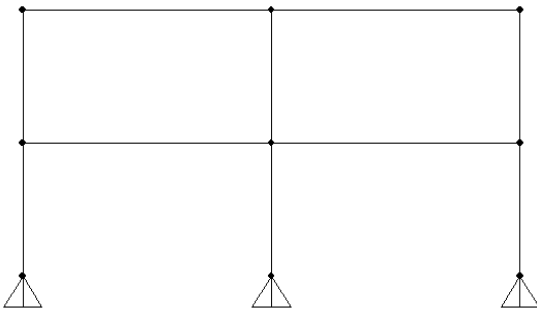
Uno dei concetti base su cui si fonda il metodo di analisi strutturale agli elementi finiti è quello della discretizzazione.

DISCRETIZZAZIONE:

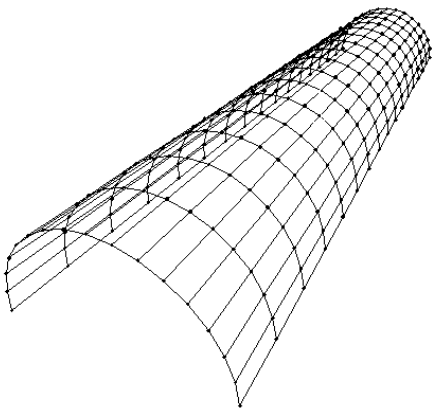
La discretizzazione è l'atto di scegliere soltanto un certo numero di punti discreti di un corpo. Ciò equivale a descrivere una struttura attraverso un numero finito di punti.

Un modo per discretizzare una struttura è quello di dividerla in un sistema equivalente di strutture più piccole o unità, tali che il loro assemblaggio dia luogo alla struttura reale.

Per un numero così grande di suddivisioni, non è possibile analizzare manualmente un così grande volume di dati, si ricorre perciò all'elaboratore elettronico; anche perché il metodo può essere programmato per poter essere eseguito da un computer in maniera relativamente semplice.



Un esempio di discretizzazione quasi immediata è quello del tipico telaio di una struttura in c.a o in acciaio.



Un esempio di discretizz. meno immediata è quello di un "continuum", come una volta, o una struttura in muratura.

Il metodo degli elementi finiti si basa sul concetto di descrivere lo stato di deformazione di un sistema continuo mediante funzioni di spostamento o "funzioni di forma", definite in piccole regioni del "continuum".

In quest'ottica le soluzioni sono formulate per ciascuna unità e combinate per ottenere la soluzione del corpo o della struttura originale.

Tipi di elemento finito:

Esistono vari tipi di elemento “base”, che combinati tra loro possono descrivere e “modellare” praticamente qualsiasi tipo di struttura.

TRUSS – è un elemento monodimensionale, un’asta con solo sforzo normale N .

FRAME – è un elemento asta con sollecitazioni N , T_x , T_y , M_x , M_y , M_z .

SHELL - è un elemento bidimensionale nelle sue varianti piastra (regime di sforzi flettenti), membrana (solo sforzi nel piano dell’elemento, N , T) o guscio (somma dei due).

SOLID – è un elemento tridimensionale, definito da almeno 4 punti nello spazio.

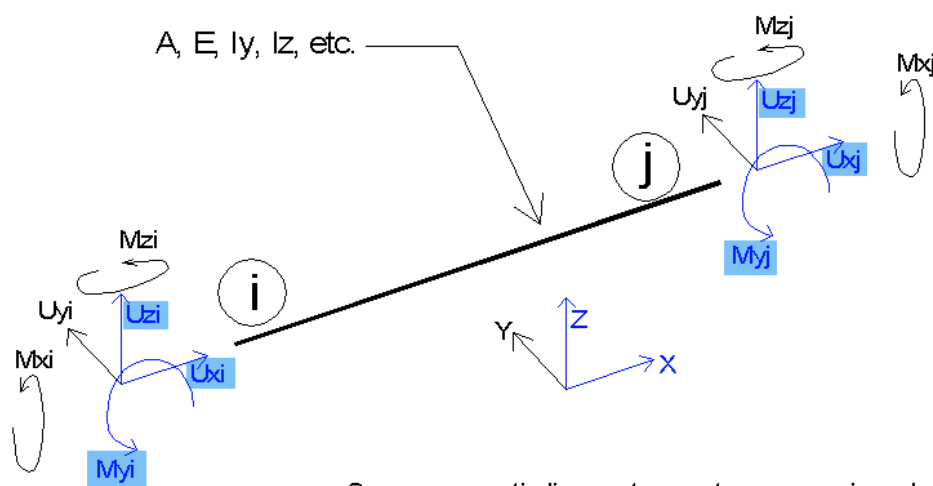
SPRING – elemento molla di rigidità K (per modellare suolo elastico alla Winkler)

RIGEL - CONSTRAINT – elementi di legame rigido, consentono di legare uno o più nodi secondari ad uno detto primario con un legame di infinita rigidità (es. telaio “shear type” per analisi sismica).

L’elemento “FRAME” - Caratt. Generali e possibilità di modellazione

L’elemento “FRAME” è una generica asta tridimensionale, che include gli effetti di deformazione assiale, taglio, torsione e momento flettente.

E’ definito da una linea retta che congiunge due punti nodali (joints).



6 componenti di spostamento per ogni nodo nello spazio.

3 componenti di spostamento per ogni nodo nel piano.

Le strutture che possono essere “modellate” con questo elemento sono:

- telai spaziali (3D).
- generiche aste spaziali (3D)
- telai piani (2D)
- graticci di travi piani (2D)
- generiche aste piane (2D)

I due joints identificano la posizione dell’elemento nello spazio. L’elemento è identificato da una serie di proprietà, come Area, Momento di Inerzia, etc. che ne descrivono le caratteristiche meccaniche. Inoltre può essere diviso in un numero di segmenti lungo i quali le sue proprietà come Area e Momento d’Inerzia cambiano con variazione lineare, parabolica o cubica (es. per modellare una ciminiera o una trave che abbia un’altezza variabile).

L'elemento "FRAME" per rappresentare un elemento strutturale esistente non può essere definito solo dalla sua posizione nello spazio (coordinate x, y, z); è necessario definire anche alcune **proprietà meccaniche** per definirne le sue caratteristiche di resistenza:

- **E Modulo di elasticità (Kg./cmq.)**
- **G Modulo di elasticità trasversale (Kg./cmq.)**
che sono caratteristiche del materiale da cui è composto, e inoltre eventualmente:
- **Coefficiente di espansione termica**
per analisi di sforzi derivanti da dilatazioni termiche
- **Massa per unità di volume**
per analisi sismica
- **Peso per unità di volume**
per poter avere il calcolo automatico del peso proprio della struttura, o gli sforzi di compressione sui pilastri calcolati automaticamente dal programma di calcolo

Oltre a queste è necessario inserire alcune **proprietà geometriche** della sezione:

- **A Area della sezione (cmq.)**
- **I_x Momento d'inerzia (cm⁴)**
- **I_y Momento d'inerzia (cm⁴)**

ed eventualmente:

- **A₂ Area di taglio (cmq.)**
- **A₃ Area di taglio (cmq.)**
- **J Costante torsionale**

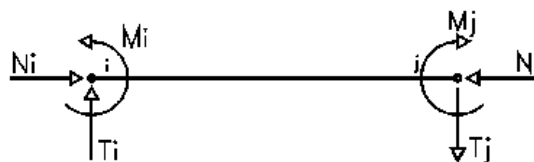
Quasi tutti i programmi permettono il calcolo automatico di tali valori per le sezioni più comuni (rettangolare, circolare, rettangolare cava, sezione a "L", a "T", a doppia "T", etc.). E' importante notare che deve essere mantenuta una necessaria congruenza tra le unità di misura data in input al programma.

Una volta definite le sue proprietà geometriche e proprietà meccaniche, e i vincoli con l'esterno l'elemento finito è perfettamente equivalente all'elemento reale nelle sue proprietà strutturali.

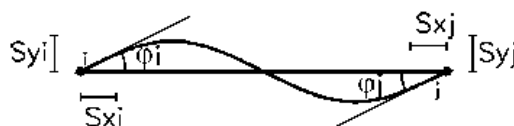
L'elemento "FRAME" - Matrice di Rigidezza - caso piano

In generale la matrice di rigidezza K di un elemento è la relazione tra forze unitarie e spostamenti unitari dei suoi punti. E' l'operatore lineare nel sistema che mette in relazione le forze applicate con i conseguenti spostamenti (e viceversa).

$$\{F\} = [K] \cdot \{U\}$$



FORZE



SPOSTAMENTI

Dove F è il vettore delle forze applicate all'elemento, K la matrice di rigidezza e U il vettore delle conseguenti deformazioni.

$$K = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix}$$

Si noti come appaia nella matrice di rigidezza il termine EA/L caratteristico della semplice relazione tra forze e spostamenti per la sollecitazione di compressione semplice.

Assemblando le varie matrici di rigidezza degli elementi (in base alla descrizione geometrica della struttura) si può determinare un sistema $F=K \times U$ relativo all'intera struttura, comprendente la matrice K di rigidezza, i vettori dei carichi nodali F , e degli spostamenti nodali U relativi in questo caso all'intera struttura. Algoritmi di calcolo permettono la risoluzione del sistema di equazioni mediante l'inversione della matrice K e la determinazione degli spostamenti nodali incogniti U (nei nodi liberi).

$$\{U\}_{strutt} = [K]_{strutt}^{INV} \cdot \{F\}_{strutt}$$

Una volta trovati gli spostamenti nodali incogniti è possibile determinare tutte le caratteristiche di sollecitazione incognite degli elementi della struttura.

Il metodo degli elementi finiti - problemi di modellazione

PROBLEMA DEL CONTROLLO E DELL'ATTENDIBILITA' DEI RISULTATI

Il metodo degli E.F. tranne rari casi non è un metodo esatto, ma approssimato. La convergenza della approssimazione con la soluzione esatta deriva da numerosi parametri.

Se il modello è impostato correttamente, siamo comunque nell'ambito di approssimazioni molto vicine alla soluzione esatta.

Vi sono comunque alcune tipiche cause di errore:

Escludendo errori dovuti ad un eventuale malfunzionamento dell'elaboratore vi possono essere:

- Errori nel codice di calcolo
- Errori nel Pre-processore e nel Post-processore.

- Approssimazioni numeriche (es. nella inversione della matrice - risoluzione del sistema di equazioni)
- Individuazione del problema fisico non corretta
- Mancanza di documentazione del software
- Non conoscenza delle limitazioni del metodo e delle ipotesi alla base
- Uso di elemento finito non adatto al modello reale, al tipo ed al livello di informazione che si vuole ottenere.

E' allora auspicabile una seria forma di controllo che si può esplicitare in:

- Controllo dei risultati a mano, mediante schematizzazioni semplificate e schemi statici semplificati
- Controllo dell'ordine di grandezza dei risultati attesi
- Benchmark tests - serie di test di prova del software con verifica di soluzioni comprovate
- Comparazione di programmi diversi tra loro e con soluzioni teoriche esatte
- Stima degli errori possibili da parte del programma (es. parametri numerici che indicano il malcondizionamento della matrice K - controllo della singolarità della matrice K, e cioè se il suo determinante sia uguale o molto vicino allo zero)
- Controllo delle condizioni di vincolo
- Editing del modello in base ai risultati ottenuti (es, infittimento della mesh in zone con gradienti elevati di tensione)

Modello di calcolo – Generazione

Per la **generazione del modello di calcolo** è necessario seguire i seguenti passi, iniziando a definire gli elementi fondamentali per una analisi di una struttura agli elementi finiti.

Joints

punti nodali che definiscono la geometria e la collocazione nello spazio della struttura

Frames (o altro elemento)

tipo di elemento finito esistente tra i joints

Material properties

caratteristiche meccaniche dei materiali utilizzati (E, G, masses, etc.)

Frame properties (section properties)

caratteristiche geometriche delle sezioni (A, I_x, I_y, etc.)

Restraints

vincoli da applicare ai Joints per rendere il sistema isostatico o iperstatico

Loads

carichi applicati (concentrati o ripartiti, statici o dinamici), sia applicati ai nodi che lungo le superfici degli elementi finiti

Go

avvio della procedura di calcolo

I **risultati** che un programma di calcolo fornisce in generale:

File EKO

file con input dato dall'utente ordinato (viene utilizzato per un controllo dati immessi)

File SOL

file con reazioni vincolari, nei nodi vincolati

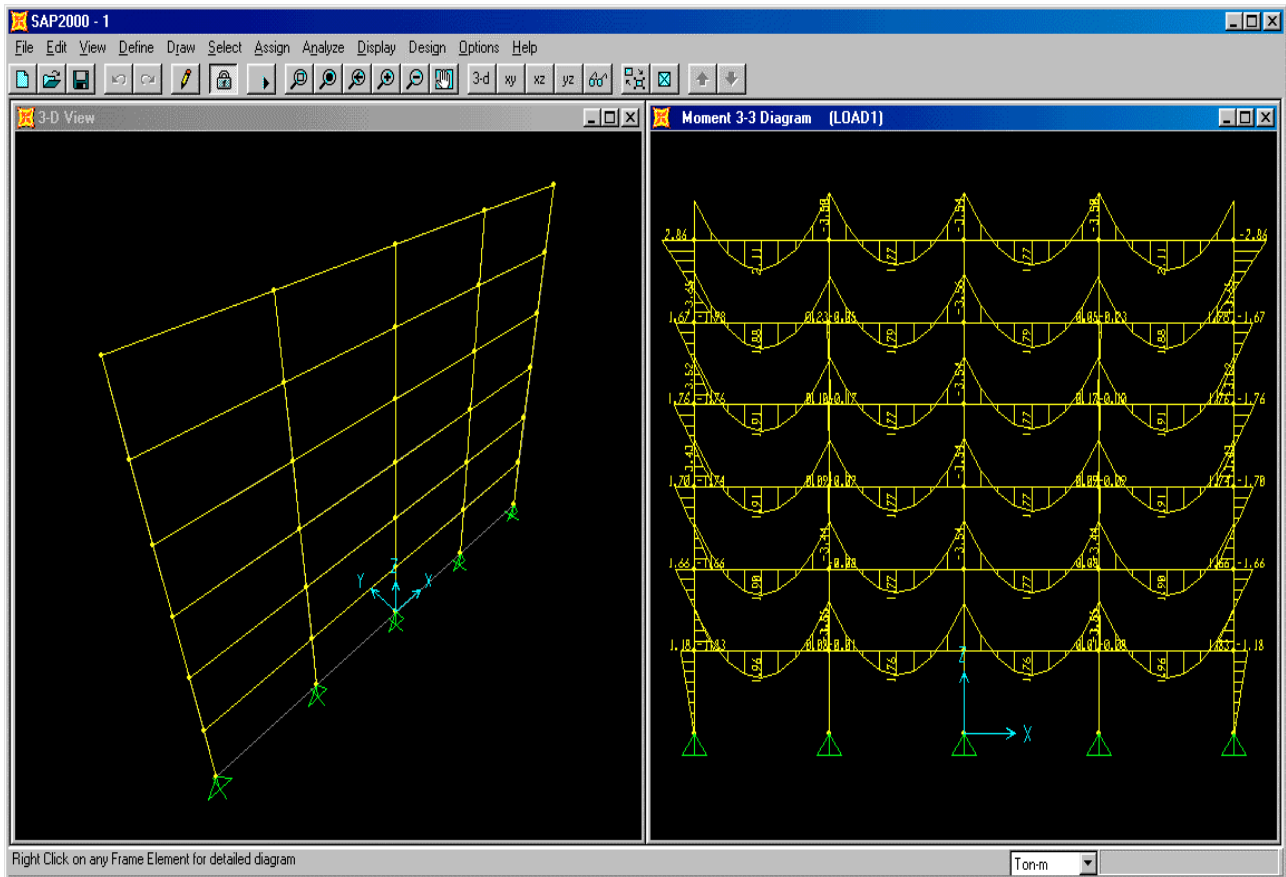
File F3F, F4F

file di testo con le sollecitazioni agenti sull'elemento considerato "FRAME", "SHELL", etc. (N, T_x, T_y, M_x, M_y, M_z)

Output grafico

delle caratteristiche di sollecitazione descritte nei file F3F, F4F (N, T_x, T_y, M_x, M_y, M_z)

L'immagine seguente mostra un esempio di output grafico del software di analisi SAP2000®, sulla sinistra la configurazione geometrica del modello di calcolo, sulla destra viene rappresentato dal computer il diagramma dei momenti flettenti nella struttura.



E' possibile anche avere per ogni elemento del modello una lista in formato testo di tutte le sollecitazioni.

Ottima.txt - Blocco note
 File Modifica Cerca 2
 SAP2000 v6.11 File: OTTIHA Ton-m Units PAGE 3
 October 18, 1999 23:38

C Units are ton Meters

FRAME ELEMENT FORCES

FRAME	LOAD	LOC	P	U2	U3	T	M2	M3
1	1	0.00	154.79	3.000E-01	16.29	-3.528E-01	219.69	13.20
		5.0E-01	154.79	3.000E-01	16.29	-3.528E-01	211.54	13.05
		1.00	154.79	3.000E-01	16.29	-3.528E-01	203.39	12.90
		1.50	154.79	3.000E-01	16.29	-3.528E-01	195.25	12.75
		2.00	154.79	3.000E-01	16.29	-3.528E-01	187.10	12.60
2	1	0.00	155.43	3.000E-01	15.62	-3.528E-01	187.10	12.60
		5.0E-01	155.43	3.000E-01	15.62	-3.528E-01	179.29	12.45
		1.00	155.43	3.000E-01	15.62	-3.528E-01	171.48	12.30
		1.50	155.43	3.000E-01	15.62	-3.528E-01	163.66	12.15
		2.00	155.43	3.000E-01	15.62	-3.528E-01	155.85	12.00
3	1	0.00	156.06	3.000E-01	14.95	-3.528E-01	155.85	12.00
		5.0E-01	156.06	3.000E-01	14.95	-3.528E-01	148.37	11.85
		1.00	156.06	3.000E-01	14.95	-3.528E-01	140.90	11.70
		1.50	156.06	3.000E-01	14.95	-3.528E-01	133.42	11.55
		2.00	156.06	3.000E-01	14.95	-3.528E-01	125.94	11.40
4	1	0.00	156.70	3.000E-01	14.29	-3.528E-01	125.94	11.40

Prima di impostare il modello di calcolo sarebbe utile attuare alcune verifiche statiche preliminari, che permettono di controllare che gli elementi strutturali progettati siano adeguati alle sollecitazioni di progetto. In altre parole è inutile impostare un modello di calcolo, anche sofisticato, se comunque le sollecitazioni di progetto superano di gran lunga la capacità degli elementi strutturali che si ha intenzione di realizzare.

Per far ciò si esegue un **predimensionamento** della struttura, riportando la stessa a **schemi semplificati di calcolo** che danno un'idea dell'ordine di grandezza delle sollecitazioni in gioco.

Si possono realizzare così alcune **verifiche strutturali preliminari**. Tali verifiche permettono anche di controllare l'output dei programmi di calcolo, evidenziando banali errori di digitazione nell'input dei dati.

Il primo passo per impostare il calcolo è quello di determinare le azioni di progetto mediante:

Normativa generale azioni e sovraccarichi:

D.M. 16/01/96 *"Norme tecniche relative ai criteri generali per la verifica di sicurezza delle costruzioni e dei carichi e sovraccarichi"*

Normativa specifica per l'elemento progettato (es. ponti, serbatoi, etc.)

La **scelta del tipo di materiale** porta a determinare delle **sollecitazioni massime ammissibili** dal materiale: $\sigma_{acc-amm}$, $\sigma_{cls-amm}$

o nel caso di verifiche agli stati limite delle **resistenze di progetto** del materiale f_{yd} , f_{cd} .

Impostazione del modello di calcolo

Una buona impostazione del modello di calcolo è fondamentale per la correttezza dei risultati

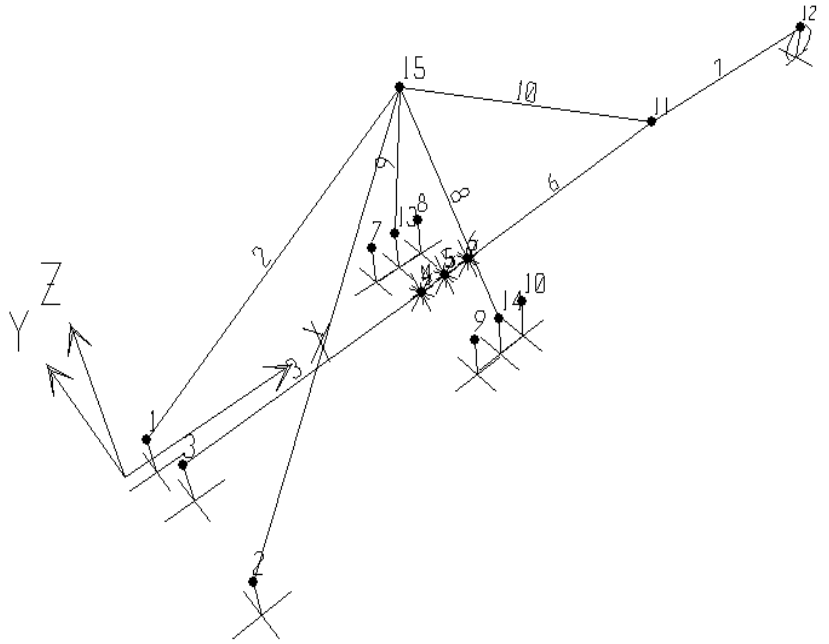
Un **buon modello di calcolo** deve :

- Rispettare le indicazioni e i **dimensionamenti** del progetto architettonico e strutturale
- Rispettare gli **assi geometrici** della struttura originaria
- Avere un buon livello di **discretizzazione**
- Utilizzare il **corretto tipo di elemento finito**, in base agli elementi strutturali adottati (es. elem. monodimensionali - pilastri e travi, elem. bidimensionali - pareti) ed alle sollecitazioni che si vogliono analizzare
- Tenere conto di tutti i **carichi** (statici e dinamici) agenti sulla struttura e del corrispondente peso proprio
- Tenere conto dei **gradi di vincolo effettivi** della struttura
- Tenere conto delle **proprietà geometriche e meccaniche** degli elementi componenti la struttura
- Non avere **nessun errore di input** dei dati (controllare il file .SAP o .EKO)

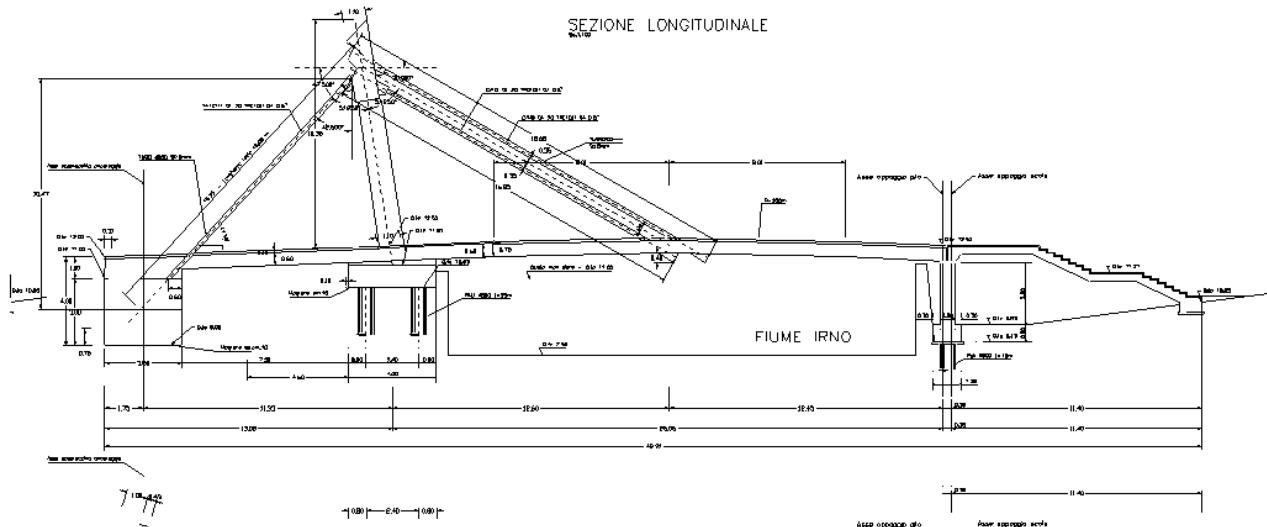
Impostazione del modello di calcolo – Generazione del file di input

I passi necessari per la definizione del file di input sono:

1. JOINTS
Punti notevoli della struttura
Normalmente il Joint viene interpretato come vincolo di continuità, a meno di non inserire un release-code (svincoli interni)
2. MATERIALS
Caratt. Meccaniche materiali
3. SECTIONS
Caratt. Geometriche sezioni
4. FRAME
Elem.finito di tipo “asta”
5. RESTRAINTS
Vincoli struttura
6. LOADS
Carichi applicati



Una volta impostato correttamente il modello di calcolo e definite correttamente le proprietà geometriche, meccaniche, i vincoli di ogni elemento; il modello è perfettamente equivalente all'elemento reale nelle sue proprietà strutturali.



C TRALICCIO ENEL CONDIZIONE DI CARICO N.2-B

C UNITA' DI MISURA : Kg; metr

SYSTEM

L=1 T=0.0001

JOINTS

```

1 X=0 Y=0 Z=0
2 X=0 Y=0 Z=7
3 X=0 Y=0 Z=14
4 X=0 Y=0 Z=20
5 X=0 Y=0 Z=21
6 X=0 Y=0 Z=28
7 X=0 Y=0 Z=35
8 X=0 Y=0 Z=37.5
9 X=0 Y=0 Z=40
10 X=1.1 Y=0 Z=0
11 X=1.1 Y=0 Z=7
12 X=1.1 Y=0 Z=14
13 X=1.1 Y=0 Z=20
14 X=1.1 Y=0 Z=21
15 X=1.1 Y=0 Z=28
16 X=1.1 Y=0 Z=35
17 X=1.1 Y=0 Z=37.5
18 X=1.1 Y=0 Z=40
    
```

FRAME

MM=2 NL=0 NSEC=5

```

1 A=0.008262 J=0.00014308 I=7.154E-05,7.154E-05 AS=0.008262,0.008262\
E=2.0389E+10 G=7.8419E+09 W=64.72 M=6.5942 TC=8.3E-06
2 A=0.1482 J=0.474 I=0.3659,0.1081 AS=0.1482,0.1482 E=2.0389E+10\
G=7.8419E+09 W=1160.9 M=118.28 TC=8.3E-06
    
```

```

1 1 2 M=2,2,1 LP=1,0
2 2 3 M=2,2,1 LP=1,0
3 3 4 M=2,2,1 LP=1,0
4 4 5 M=2,2,1 LP=1,0
5 5 6 M=2,2,1 LP=1,0
6 6 7 M=2,2,1 LP=1,0
7 7 8 M=2,2,1 LP=1,0
8 8 9 M=2,2,1 LP=1,0
9 10 11 M=2,2,1 LP=1,0
10 11 12 M=2,2,1 LP=1,0
11 12 13 M=2,2,1 LP=1,0
12 13 14 M=2,2,1 LP=1,0
13 14 15 M=2,2,1 LP=1,0
14 15 16 M=2,2,1 LP=1,0
15 16 17 M=2,2,1 LP=1,0
16 17 18 M=2,2,1 LP=1,0
17 2 11 M=1,1,1 LP=2,0
18 3 12 M=1,1,1 LP=2,0
19 5 14 M=1,1,1 LP=2,0
20 6 15 M=1,1,1 LP=2,0
21 7 16 M=1,1,1 LP=2,0
    
```

RESTRAINTS

```

1 1 1 R=1,1,1,1,1,1
10 10 1 R=1,1,1,1,1,1
    
```

LOADS

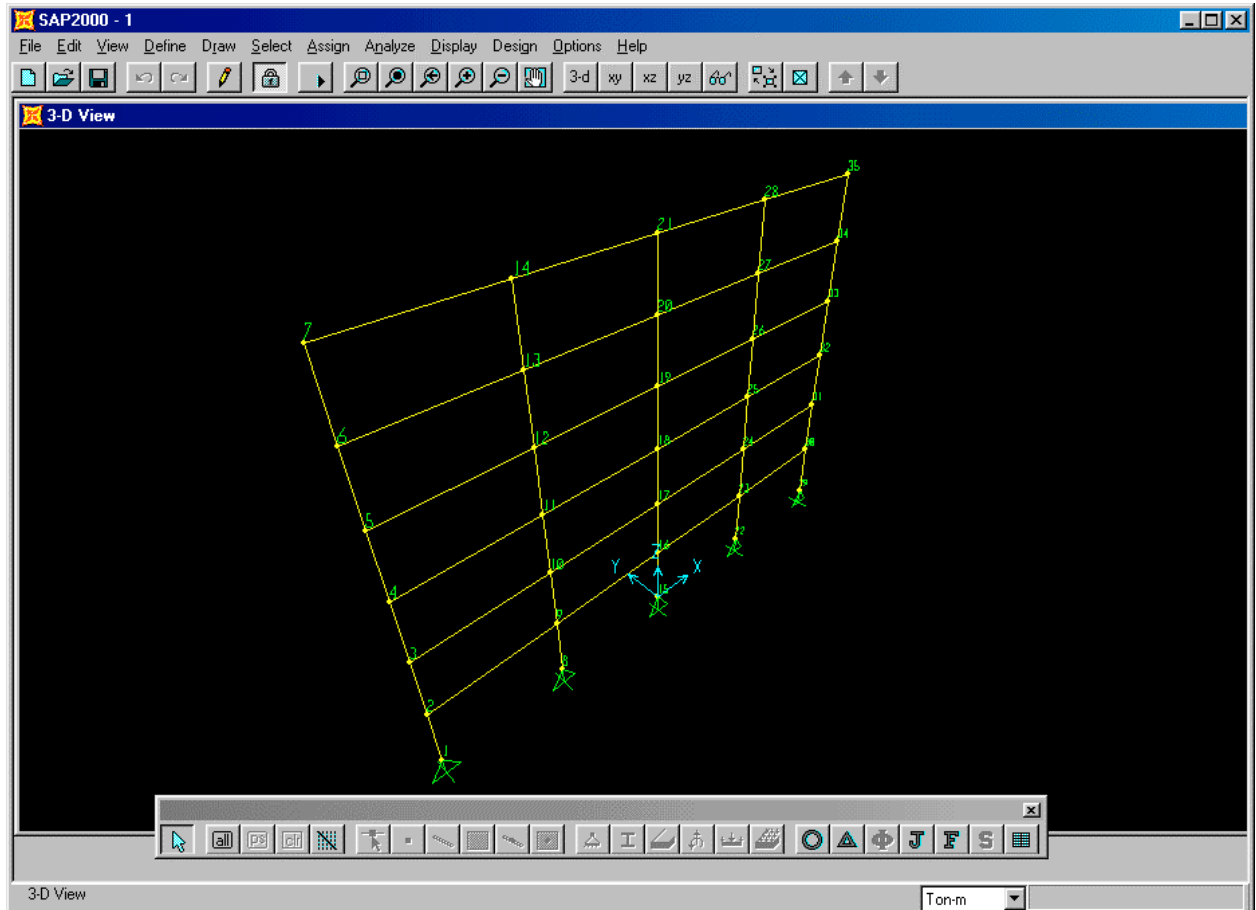
```

18 18 1 L=1 F=5200,0,0,0,-19760,0
16 16 1 L=1 F=5200,0,0,0,-19760,0
8 8 1 L=1 F=5200,0,0,0,-19760,0
4 13 9 L=1 F=3040,0,0,0,0,0
    
```

E' possibile inserire tutte le caratteristiche della struttura mediante un **file di testo** di input come sopra, nel quale sono riportati tutti i dati necessari (Joints, Frames, Materials, Restraints, Loads, etc.). Oppure per **via interattiva**; utilizzando le finestre di dialogo dei programmi più recenti (come ad es. SAP 2000).

A questo punto, una volta impostato il modello ed assegnati i carichi, si possono determinare le sollecitazioni nei vari elementi della struttura e procedere alle verifiche strutturali definitive.

- Tali verifiche vengono riportate nella **relazione di calcolo**, che contiene:
- descrizione sommaria della struttura e della tipologia strutturale utilizzata
 - normativa di riferimento
 - analisi dei carichi
 - calcolo delle sollecitazioni
 - verifiche strutturali
 - tabulati dei software di calcolo



Riferimenti bibliografici

Metodo degli elementi finiti - teoria:

- O.C. Zienkiewicz, *"The finite element method"*, Mc Graw Hill, 1979.
C.A. Brebbia, J. Connor, *"Fundamentals of finite elements techniques"*, Butterworths, 1973.
Cesari F., *"Introduzione al metodo degli elementi finiti"*, Pitagora ed., Bologna, 1982.
L. Benato, R. Masiello, *Analisi elastica di un edificio a telaio in zona sismica - parte 1°*, ESA, 1983
CISM, *"Analisi per elementi finiti: modellazione strutturale e controllo dei risultati"*, 1991.
A. Bove, *"Introduzione ai programmi di calcolo strutturale - Sap 90 - Supersap - Cosmos e i programmi shareware"*, 2 ed., Dario Flaccovio ed., 1995.

Metodo degli elementi finiti - modellazione - calcolo:

- Computer & Structures Inc., Wilson E. L., Habibullah A., *"Sap 90 - A Series of Computer Program for the Static and Dynamic Finite Element Analysis of Structures, Users Manual"*, Berkeley, 1988.
CSI Computer and Structures, Inc., *"Sap 2000 - Getting Started"*, *"Tutorial Manual"*, 1997.
CSI Computer and Structures, Inc., *"Sap 2000 - Basic Analysis Reference"*, 1997