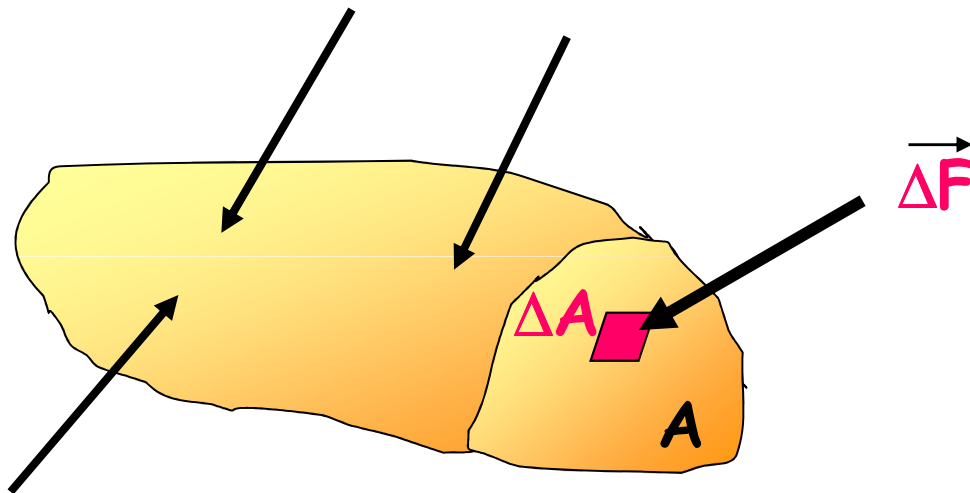


# Meccanica del continuo

Corpo rigido

Corpo deformabile → Concetti base:  
- tensioni  
- deformazioni



$$\Delta \vec{F} = \Delta \vec{F}^n + \Delta \vec{F}^t$$

Il terreno è un corpo che può essere sollecitato anche da sforzi di taglio (a differenza dei fluidi)

Tensione normale

$$\sigma = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F^n}{\Delta A}$$

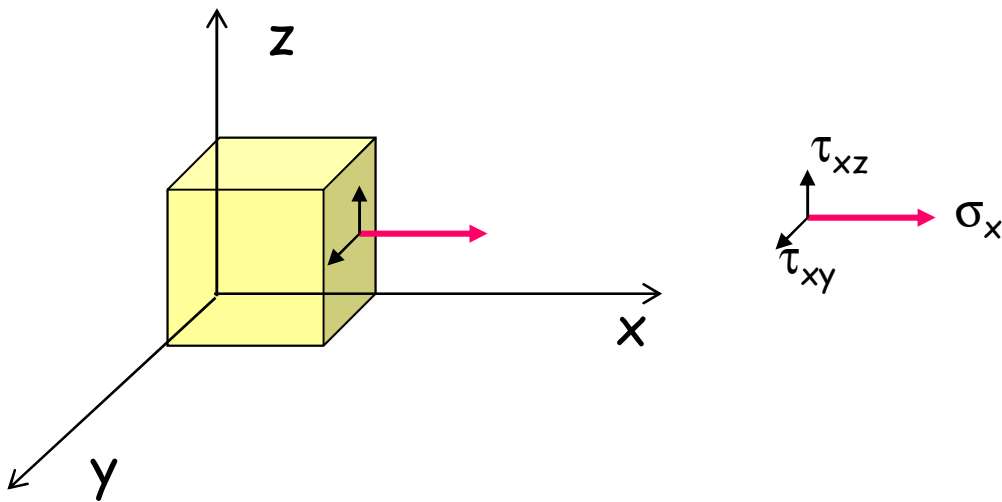
Tensione di taglio

$$\tau = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F^t}{\Delta A}$$

Funzioni del punto

Su di una faccia  $\Delta a$  del cubetto elementare agisce una tensione normale e una tangenziale

Se si prende un sistema di riferimento con un asse coincidente con il vettore normale e gli altri due sul piano individuato da  $\Delta a$



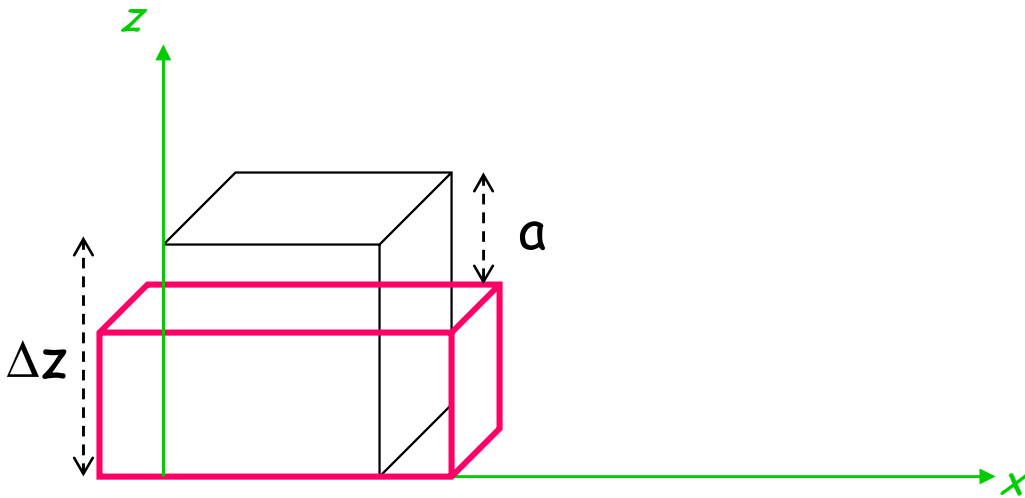
In generale lo stato tensionale in un punto si rappresenta con:

**il tensore delle tensioni:**

$$\begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix} \quad \tau_{ij} = \tau_{ji}$$

## Definizioni semplificate

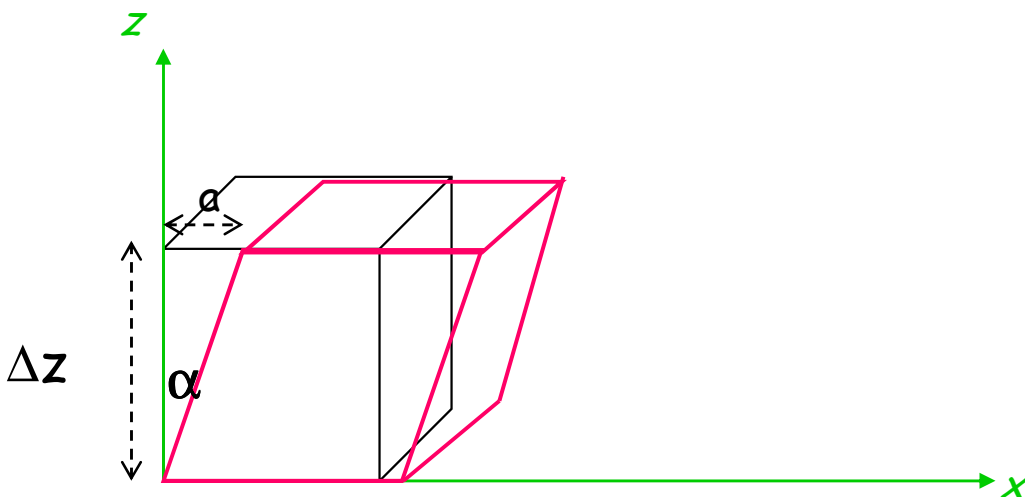
### Deformazioni normali



$$\varepsilon_z = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{a}{\Delta z}$$

Misura di quanto si comprime; vi è associata una variazione di volume

### Deformazioni angolari (scorrimento o distorsione)



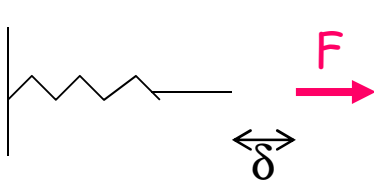
$$\gamma_{zx} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{a}{\Delta z}$$

Misura di quanto scorre e si deforma; vi è associato un cambiamento di forma  $\alpha \cong \text{tg}\alpha = a/\Delta z$

# Reologia

Si occupa del modo di reagire dei materiali alle azioni praticate

- Modello elastico (molla)



$$F = K(\delta) \delta \quad K = \text{rigidezza molla}$$

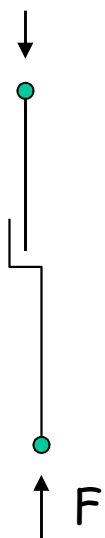
Rigidezza  
 $\sigma = E \varepsilon$

Deformabilità  
 $\varepsilon = \frac{1}{E} \sigma$

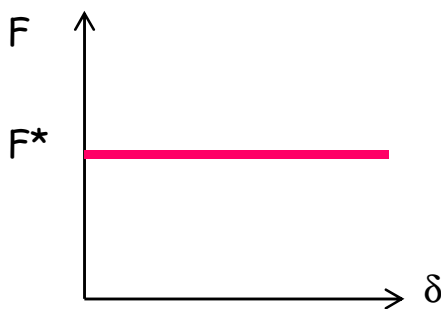
E = modulo di Young

All'aumentare del modulo di Young, diminuisce la deformazione

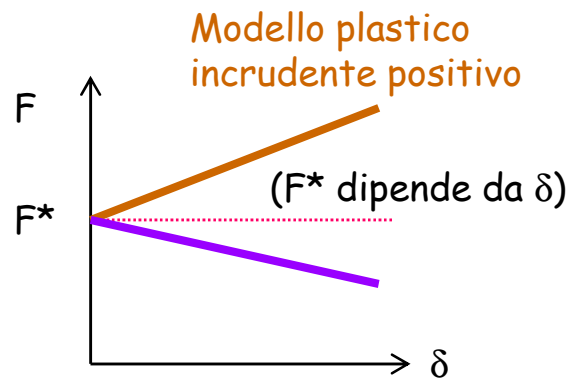
- Modello plastico (morsetto ad attrito)



$$\begin{aligned} F \geq F^* &\rightarrow \delta > 0 \\ F < F^* &\rightarrow \delta = 0 \end{aligned}$$

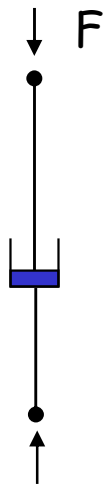


Modello plastico perfetto  
(F\* non dipende da δ)

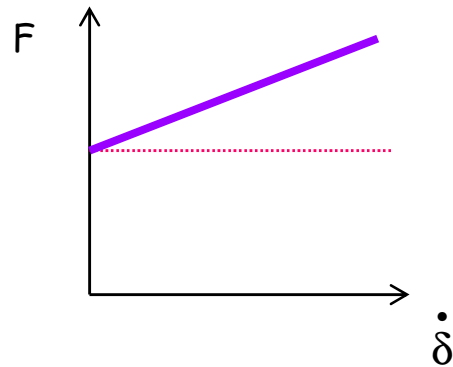


Modello plastico incrudente negativo

• **Modello viscoso (ammortizzatore)**



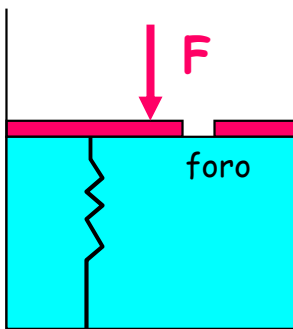
$$F = K(\delta) \frac{d\delta}{dt} = K(\delta) \dot{\delta}$$



Modello viscoso perfetto

• **Modello di Kelvin (elastico-viscoso)**

molla = scheletro solido  
 liquido = fluido interstiziale  
 foro = permeabilità



Viene applicata una forza  $F$ , questa si ripartisce tra fluido e scheletro solido  
 $F = F_{molla} + F_{acqua}$

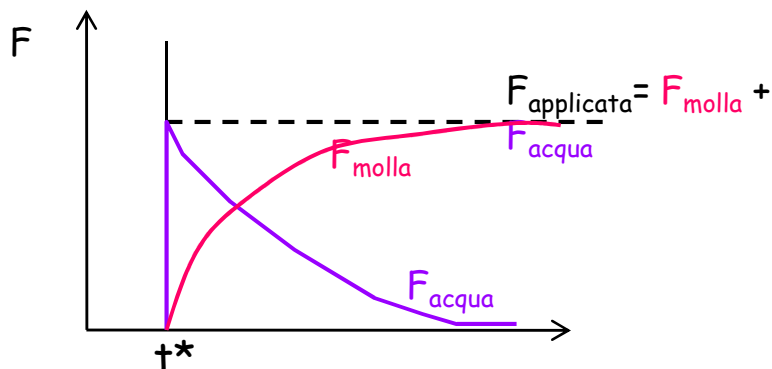
Istantaneamente, al tempo  $t=t^*$ ,  $F = F_{acqua}$

$$F_{acqua} = u_w A \rightarrow u_w = \frac{F}{A}$$

A  $t = \infty$

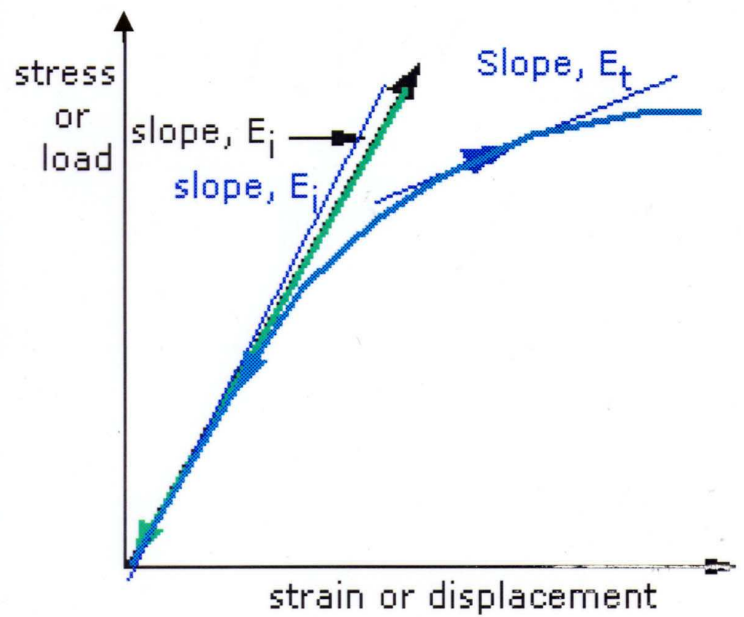
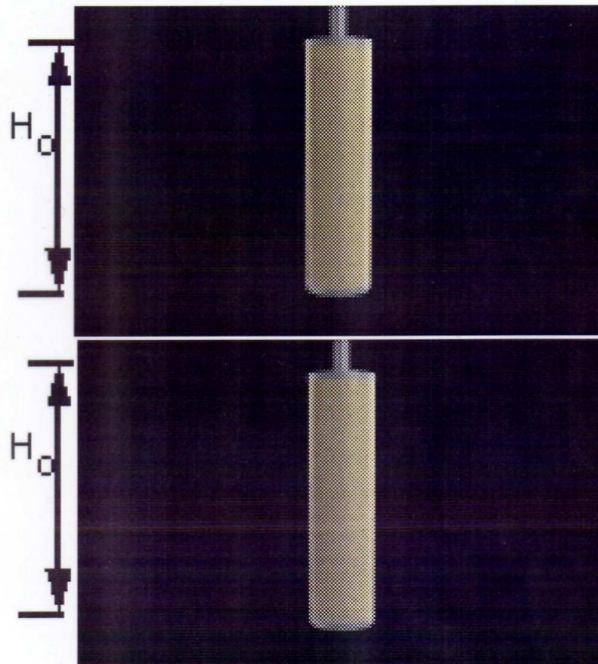
$$F = F_m \rightarrow$$

$$\delta = \frac{F_m}{K} = \frac{F}{K}$$

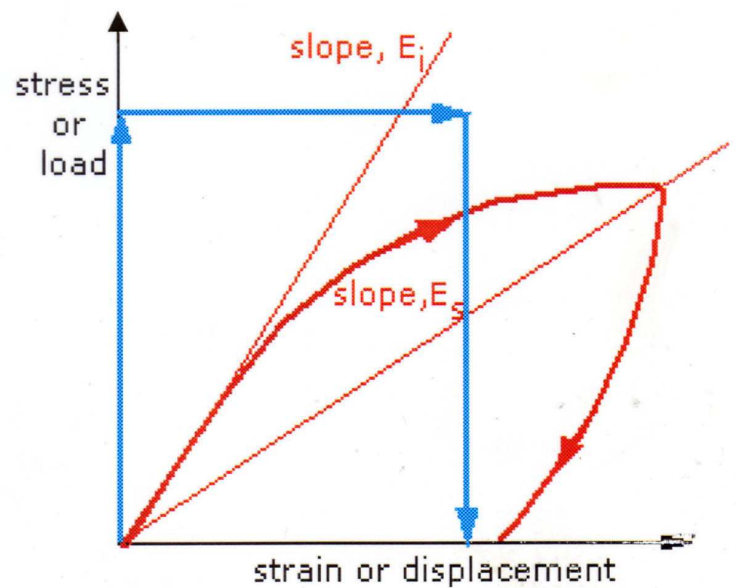
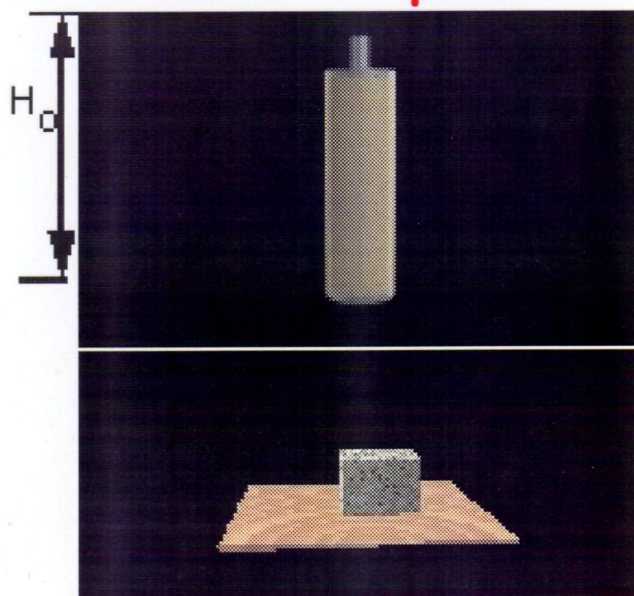


# Modelli di comportamento

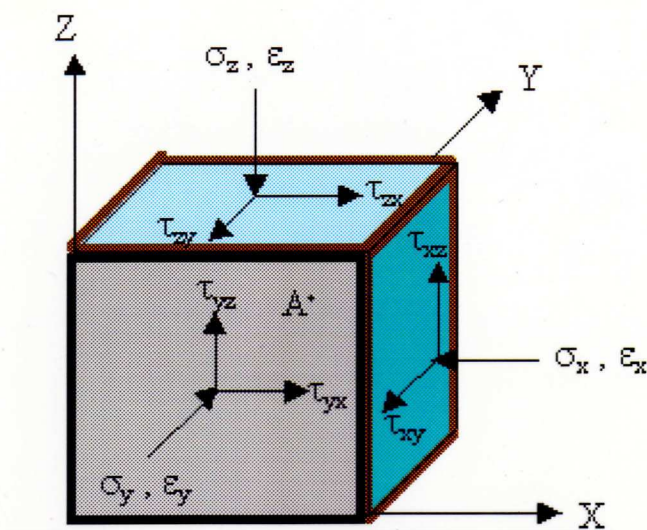
- elastico lineare



- elastico non-lineare



- rigido -plastico



Su un elemento di terreno agiscono sforzi normali ( $\sigma$ ) e di taglio ( $\tau$ )

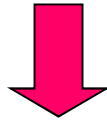
Le deformazioni normali sono  $\epsilon$ , quelle di taglio  $\gamma$

Per trovare le deformazioni imposti gli sforzi, e viceversa, si usa la *legge di Hooke*

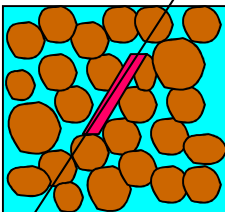
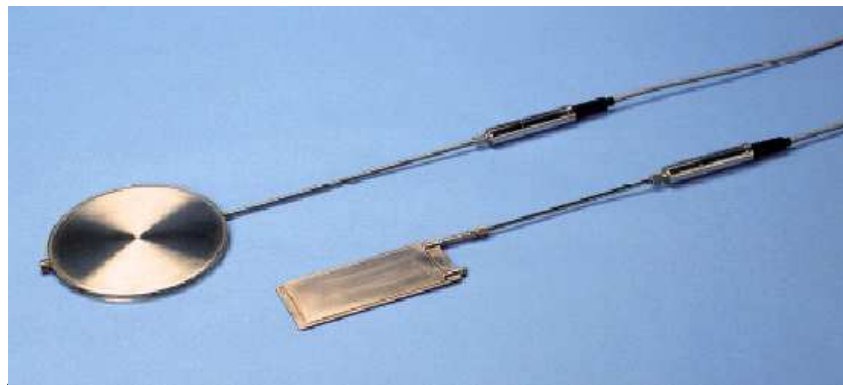
$$\begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & 1 & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & -\nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{Bmatrix}$$

Matrice di congruenza

Non riuscendo a studiare i terreni conoscendo l'evoluzione delle forze di contatto fra le particelle, trattando ogni singolo granulo come se fosse un corpo rigido



È necessario individuare un elemento di materiale che sia **rappresentativo** e **sufficientemente piccolo** per poter attribuire a tutte le grandezze che vengono definite il significato di **grandezze puntuali**



Sez. ideale

Ipotesi: introduciamo all'interno una cella di pressione per misurare le forze  $N$ ,  $T$  che si scambiano mutuamente le parti di terreno attraverso l'area  $A$  della cella.

(l'esperimento è ideale perché l'introduzione della cella disturberebbe proprio le grandezze che voglio misurare)

### Tensioni totali

$$\sigma = \frac{N}{A} \quad \tau = \frac{T}{A}$$

Sforzi medi indotti dalle forze  $N$  e  $T$  su  $A$ , non sono gli sforzi tra le superfici di contatto delle singole particelle

$$A = a_c + a_w + a_g$$

$a_c$  = area di contatto  
 $a_w$  = area dell'acqua  
 $a_g$  = area del gas



## Area di contatto ed area dei fluidi interstiziali



$$A = a_c + a_w + a_g$$

$a_c$  = area di contatto  
 $a_w$  = area dell'acqua  
 $a_g$  = area del gas

Trattiamo quindi il terreno come un continuo e gli applichiamo le leggi della meccanica del continuo

Per descrivere lo stato di sforzo in un terreno si fa riferimento allo **sforzo efficace**

## Tensioni efficaci

È una grandezza fittizia, a cui non corrisponde un vero e proprio stato di sforzo.

È definita dal rapporto fra la somma delle forze normali  $n'_i$  e tangenziali  $t'_i$ , che si scambiano le particelle solide attraverso i singoli contatti e l'area della piastra di misura

$$\sigma' = \frac{\sum n'_i}{A} \quad \tau' = \frac{\sum t'_i}{A}$$

La possibilità di impiegare tale definizione discende direttamente dal **PRINCIPIO delle TENSIONI EFFICACI** (Terzaghi, 1923).

*“ La risposta meccanica dei terreni alle azioni esterne viene a dipendere solo da quella parte delle forze che non si scarica come pressione sui fluidi interstiziali ”*

La scrittura delle condizioni di equilibrio delle forze, che si scambiano attraverso la piastra, permette di vedere come le tensioni efficaci rappresentino proprio la quota di forza esterna che finisce sui granuli, riferita all'area totale della piastra della cella di misura

$$\sigma = \frac{N}{A} = \frac{\sum n'_i}{A} + \frac{u_w a_w + u_g a_g}{A} = \sigma' + \frac{u_w a_w + u_g a_g}{A}$$

$$\tau = \frac{T}{A} = \frac{\sum t'_i}{A} = \tau'$$

Equilibrio in direzione normale e tangenziale; i fluidi non trasmettono sollecitazioni tangenziali

Per  $S_r > 0.8$

$u_g = u_w = u =$  pressione interstiziale

$$\sigma = \sigma' + u \frac{a_w + a_g}{A} = \sigma' + u \left( 1 - \frac{a_c}{A} \right)$$

Essendo  $A \gg a_c$

$$\begin{array}{l} \sigma = \sigma' + u \\ \tau = \tau' \end{array} \quad (*)$$

PRINCIPIO delle TENSIONI EFFICACI (Terzaghi, 1923).

Gli sforzi totali vengono calcolati analizzando il corpo di terreno con la meccanica del continuo (talvolta possono essere misurati con l'impiego di celle di pressione totale)

Le pressioni interstiziali sono calcolate attraverso la risoluzione di problemi di idraulica nei mezzi porosi o sono misurate in situ (*piezometri*)

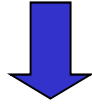
Gli sforzi efficaci poiché fittizi non possono essere in nessun caso misurati e devono essere necessariamente dedotti applicando le espressioni (\*)

### STATI DI SFORZO NELLE TERRE

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix} \quad \sigma' = \begin{pmatrix} \sigma_x - u & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y - u & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z - u \end{pmatrix}$$

# Tensioni litostatiche

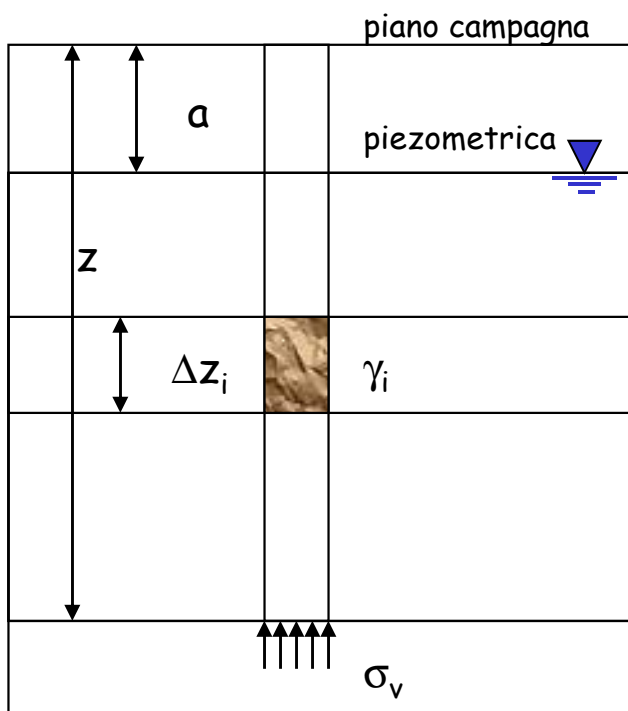
Stato di sforzo cui è soggetto il terreno nella sua sede naturale, per solo effetto del peso proprio



può essere determinata solo in particolari condizioni

## IPOTESI:

deposito con p.c. orizzontale, molto esteso rispetto profondità di interesse e caratterizzato da uniformità dei terreni in senso orizzontale



### sforzo verticale totale

$$\sigma_v = \sum_i \gamma_i \Delta z_i$$

### pressione interstiziale

$$u = \gamma_w z_w = \gamma_w (z - a)$$

### sforzo verticale efficace

$$\sigma'_v = \sigma_v - u = \left( \sum_i \gamma_i \Delta z_i \right) - \gamma_w (z - a)$$

Calcolo degli sforzi litostatici verticali

È possibile ricavare lo sforzo verticale esistente alla profondità  $z$  attraverso semplici condizioni di equilibrio



Il peso della colonna di terreno è equilibrata dalla risultante degli sforzi totali verticali agenti sull'area di base  $A$ , dovendo essere nulle le forze agenti sui piani verticali che contornano la colonna (perché piani di simmetria)



In queste condizioni le direzioni verticali e orizzontali sono direzioni principali

Considerazioni di natura sperimentale indicano una relazione sperimentale tra sforzi efficaci verticali ed orizzontali

Il **coefficiente di spinta a riposo ( $K_0$ )** correla sforzi efficaci verticali ed orizzontali.

**$0.4 < K_0 < 2$**  in relazione alla storia tensionale trascorsa dal deposito.

**$K_0 < 1$**  per terreni che non hanno subito riduzioni di tensione (per es. a seguito di fenomeni erosivi) → è possibile ricavarlo empiricamente dalle caratteristiche di resistenza.

Per molti terreni naturali **normalmente consolidati (NC)** viene utilizzata la formula di **Jaky (1944)**:

$$K_0 \text{ (NC)} = 1 - \sin \phi'$$

Molti depositi, dopo le fasi di sedimentazione e di consolidazione, hanno subito una fase di erosione con conseguente scarico tensionale

- la max tensione efficace  $\sigma_p'$  sopportata durante la storia risulta superiore a quella attuale  $\sigma_{v0}'$
- questi terreni vengono detti **sovracconsolidati (OC)**
- l'entità del fenomeno di sovracconsolidazione viene individuato dal parametro di sovracconsolidazione OCR (Over consolidation ratio)

$$\text{OCR} = \sigma_p' / \sigma_{v0}'$$

$\sigma_{v0}'$  : si calcola

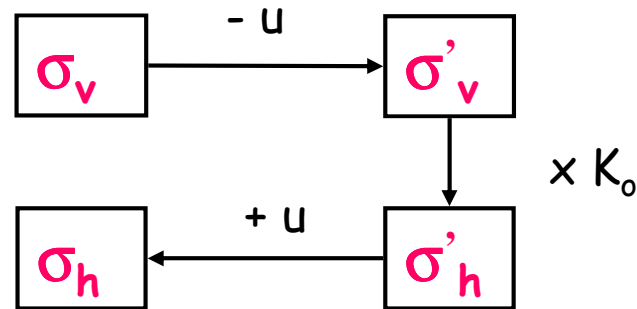
$\sigma_p'$  : si determina sperimentalmente in laboratorio

Quando il terreno passa da uno stato NC a uno OC il coefficiente di spinta a riposo  $K_0$  aumenta e può essere valutato mediante relazioni empiriche del tipo (Schmidt, 1966; Alpan, 1967)

$$K_0 \text{ (OC)} = K_0 \text{ (NC)} \text{OCR}^\alpha$$

Un valore di  $\alpha$  suggerito da Meyerhof (1976) per molte argille è 0.5

## Schema per il calcolo degli sforzi orizzontali totali in condizioni litostatiche

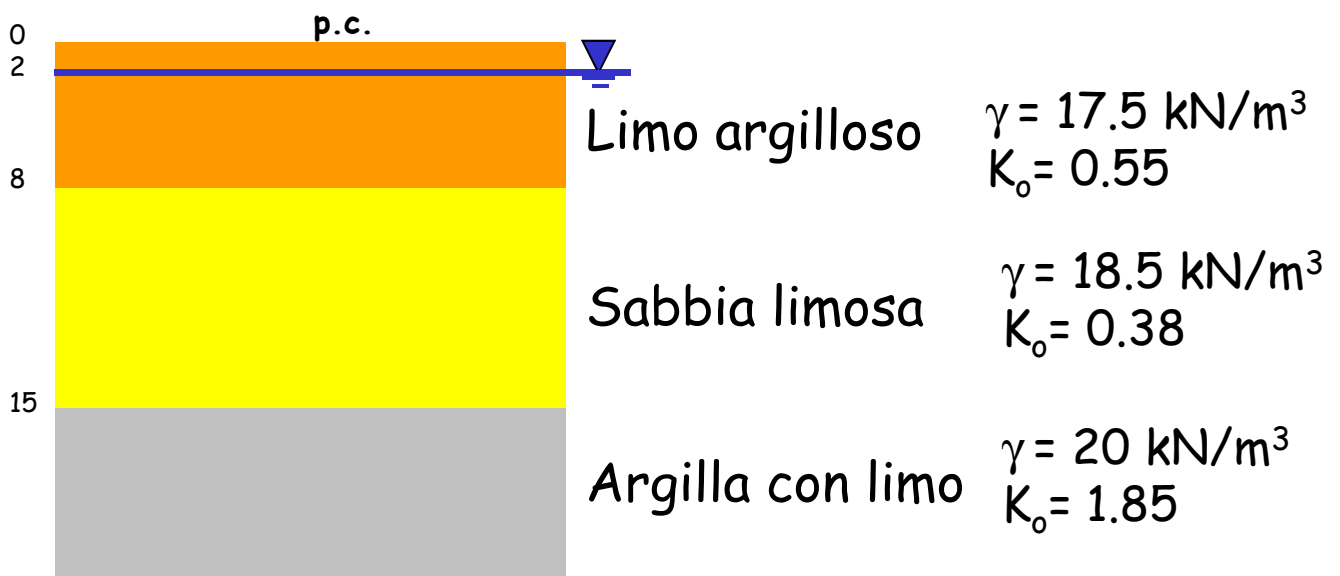


$$\sigma_v = \sum_i \gamma_i \Delta z_i$$

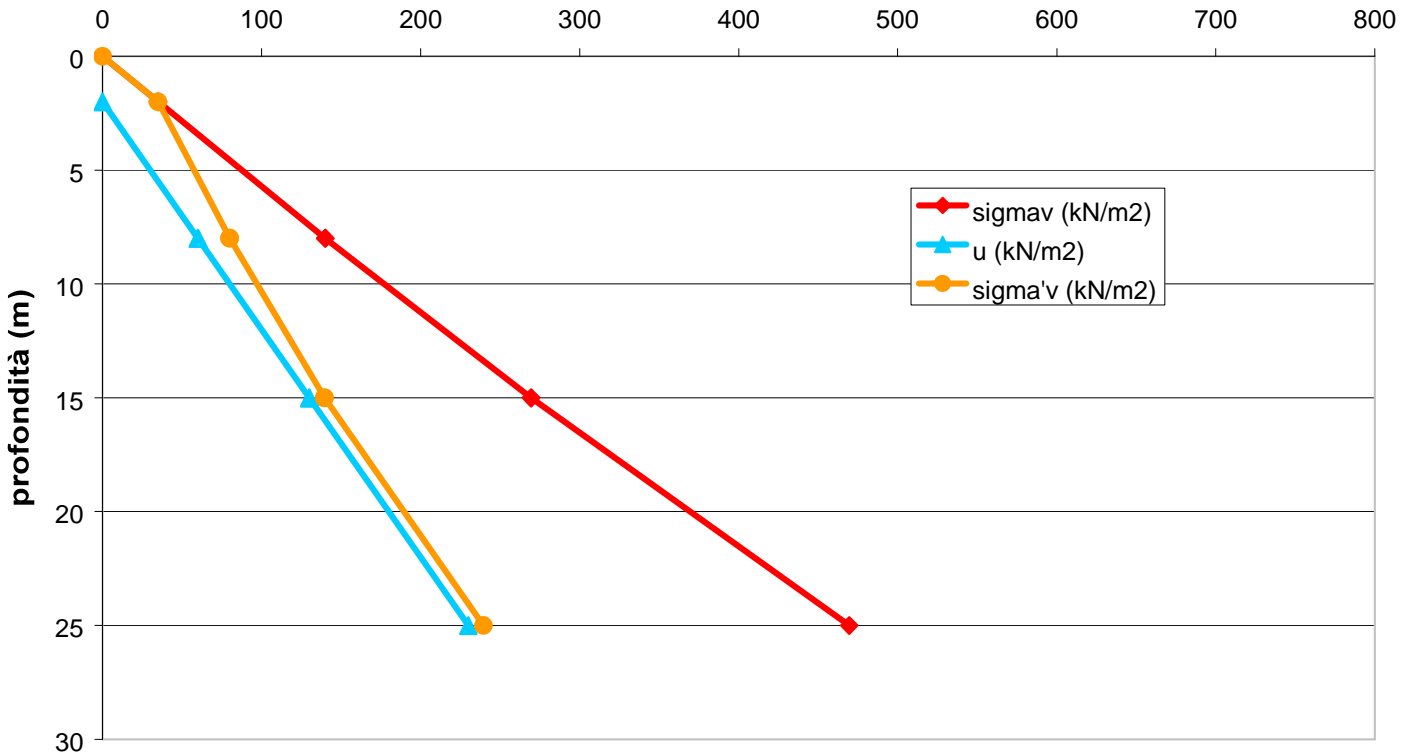
$$\sigma'_v = \sum_i \gamma_i \Delta z_i - u$$

$$\sigma'_h = K_o \times \left( \sum_i \gamma_i \Delta z_i - u \right)$$

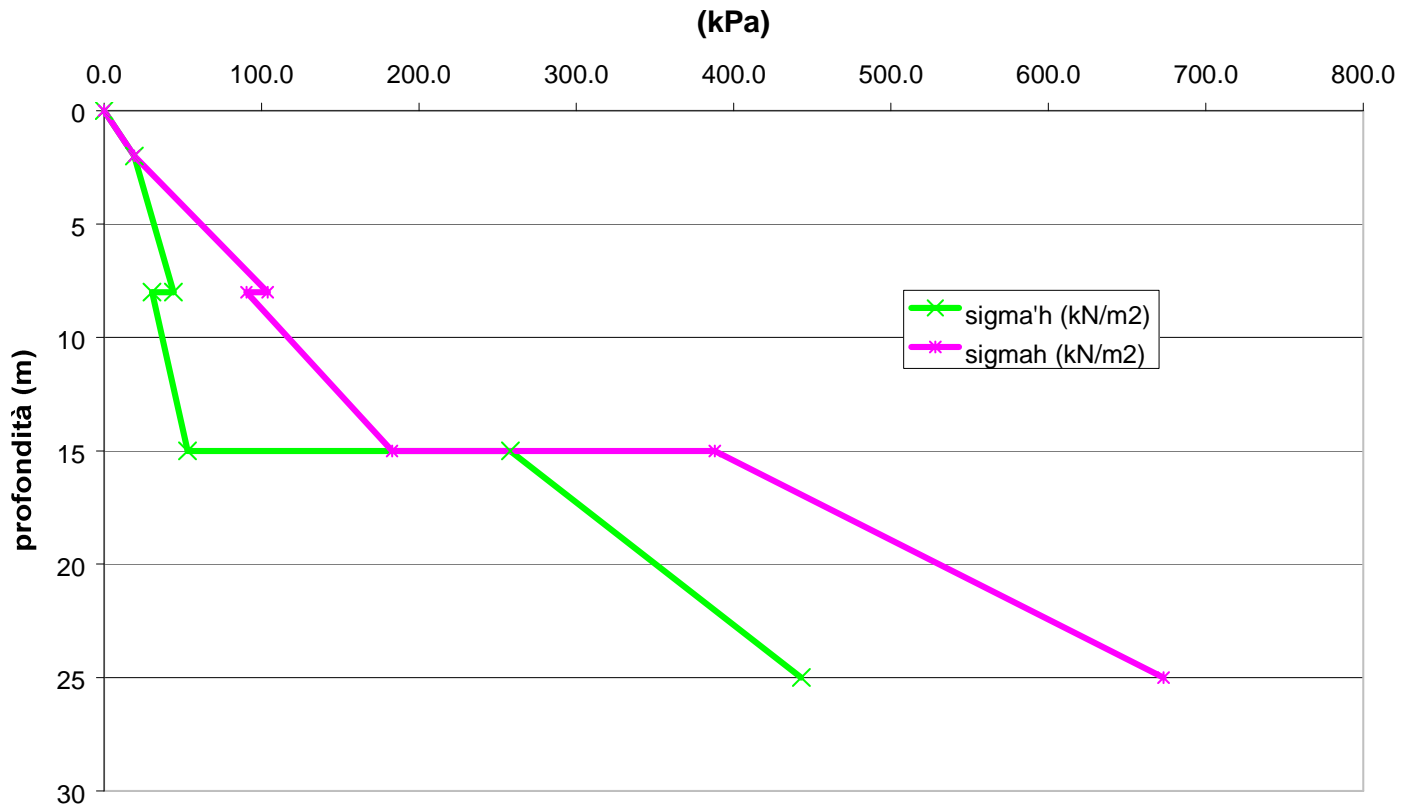
$$\sigma_h = \left[ K_o \times \left( \sum_i \gamma_i \Delta z_i - u \right) \right] + u$$



### Andamenti delle tensioni litostatiche verticali e della pressione interstiziale (kPa)

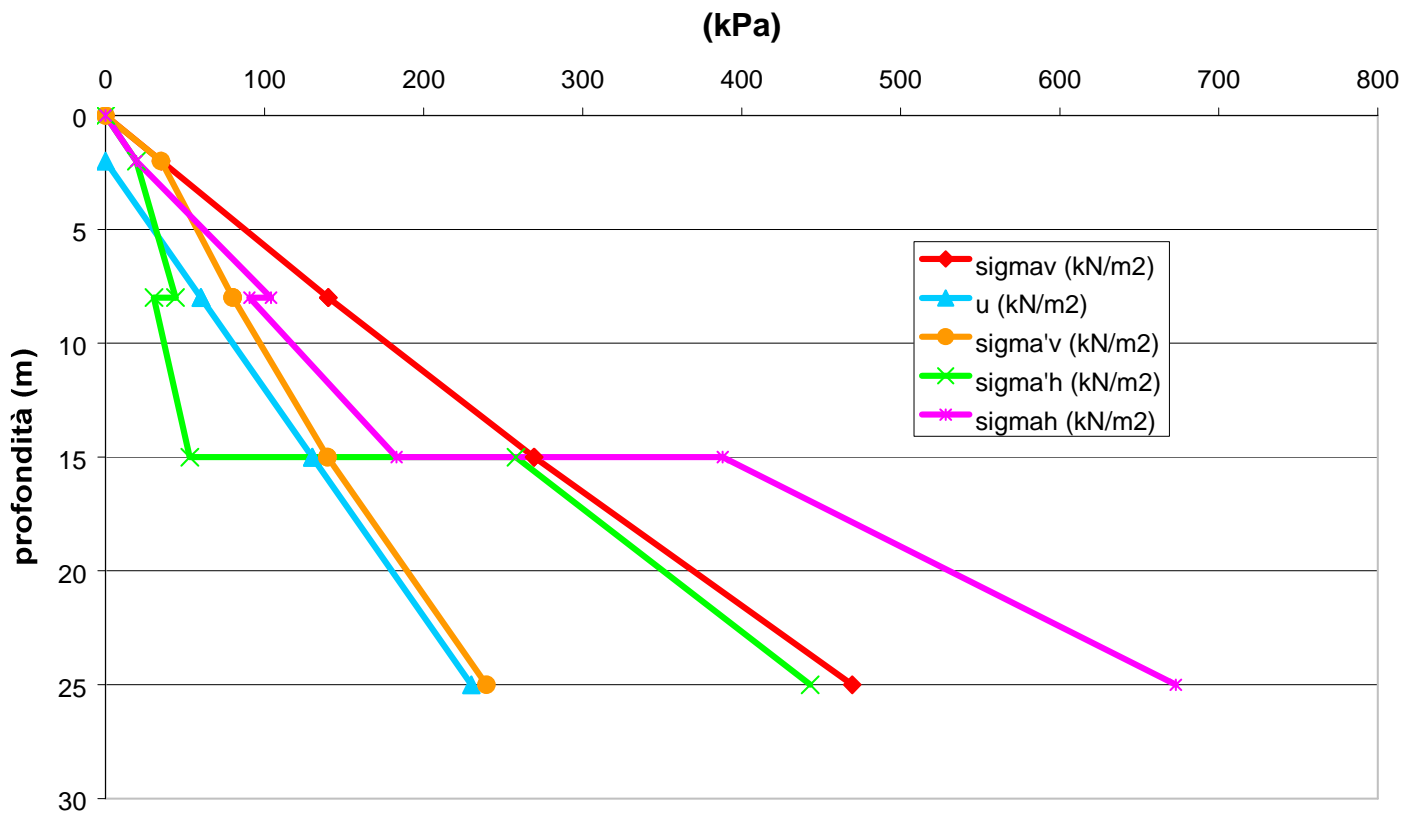


### Andamenti delle tensioni litostatiche orizzontali





## Andamenti con la profondità delle tensioni nel terreno



<b>z (m)</b>	<b>gamma (kN/m<sup>3</sup>)</b>	<b>sigma'mav (kN/m<sup>2</sup>)</b>	<b>u (kN/m<sup>2</sup>)</b>	<b>Ko</b>	<b>sigma'v (kN/m<sup>2</sup>)</b>	<b>sigma'h (kN/m<sup>2</sup>)</b>	<b>sigma'mah (kN/m<sup>2</sup>)</b>
0	17.5	0	0	0.55	0	0.0	0.0
2	17.5	35	0	0.55	35	19.3	19.3
8	17.5	140	60	0.55	80	44.0	104.0
8	18.5	140	60	0.38	80	30.4	90.4
15	18.5	269.5	130	0.38	139.5	53.0	183.0
15	20	269.5	130	1.85	139.5	258.1	388.1
25	20	469.5	230	1.85	239.5	443.1	673.1