

II.1.2 CALCOLO ALGEBRICO:

METODO DELLA CONGRUENZA DEGLI SPOSTAMENTI DI CLAPEYRON E MULLER BRESLAU

Il sistema principale si ottiene togliendo vincoli sino all'isostaticità, ad esempio tramite cerniera sull'appoggio centrale B:

Il metodo è vantaggioso nel calcolo manuale quanto più la struttura è isostatica o a nodi spostabili peraltro, dovendo scegliere opportunamente il SISTEMA PRINCIPALE, il metodo non si presta al calcolo automatico come il metodo delle forze. Si rendono equivalenti i carichi ai nodi tramite i momenti d'incastro perfetto:

$$m_{AB} = m_{BA} = m_{BC} = m_{CB} = \frac{pl^2}{12} \quad (\text{vedi in seguito}).$$

Si ipotizzano:

- i nodi fissi: $\delta=0$; la rotazione è $\vartheta = \frac{M}{K}$
- che per reazione iperstatica unitaria risulta $\vartheta = \frac{1}{K}$
- $l_{BA} / E_{BA} J_{BA} = l_{BC} / E_{BC} J_{BC}$
- negli altri nodi $M_A = M_C = 0$;
- assenza di pilastri $m_C = 0$ eventuale momento esterno di incastro perfetto.

Si trascura il contributo Σx ; Σy ovvero T ed N.

Si cerca l'unica soluzione congruente in ciascun nodo i nel caso B:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^r \vartheta_i(M_{ir}; M_{ri}; p; \delta) &= 0 \quad (p \rightarrow m) \\ \vartheta_{BA}(M_{BA} = 1) + \vartheta_{BA}(M_B = 1) - \vartheta_{BA}(m_{BA}) - \vartheta_{BA}(m_{BA}) &= \\ = -\vartheta_{BC}(M_{BC} = 1) - \vartheta_{BC}(M_C = 1) + \vartheta_{BC}(m_{BC}) + \vartheta_{BC}(m_{BC}) & \end{aligned}$$

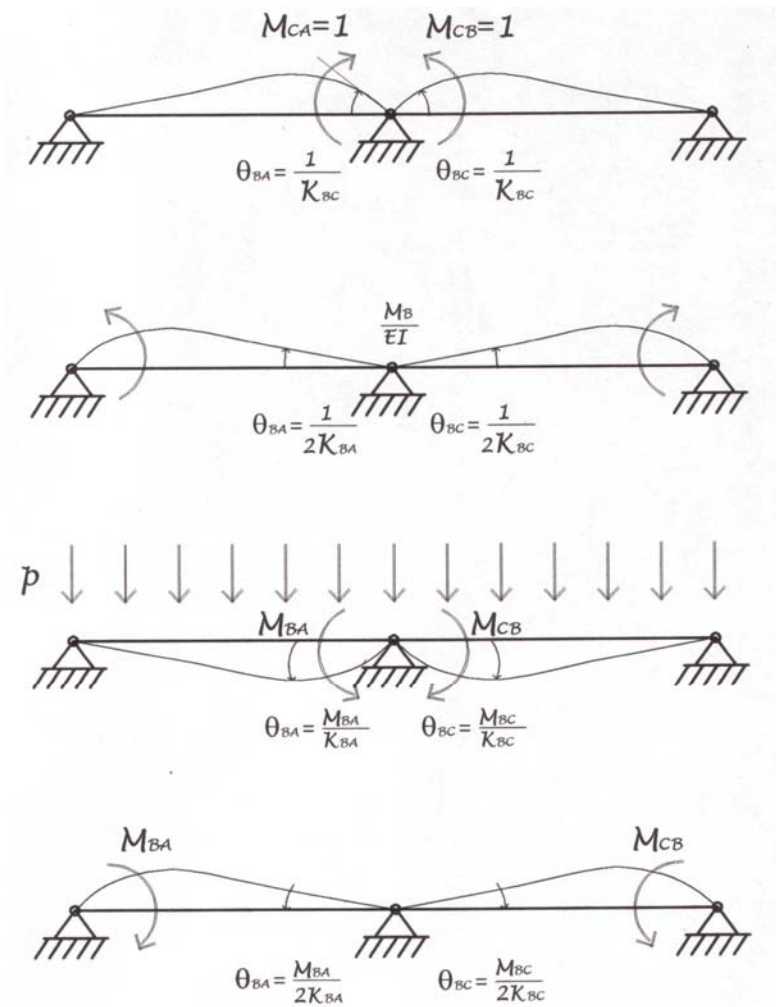
ovvero l'EQUAZIONE DEI 4 MOMENTI

$$\begin{aligned} \frac{l_{BA}}{E_{BA} J_{BA}} (M_A + M_{BA}) + \frac{6l_{BA}}{6 E_{BA} J_{BA}} (2M_{BC} + M_C) &= \\ = \frac{l_{BA}}{6 E_{BA} J_{BA}} (m_{BA} + m_{BA}) + \frac{l_{BC}}{6 E_{BC} J_{BC}} (2m_{BC} + m_{CB}) & \end{aligned}$$

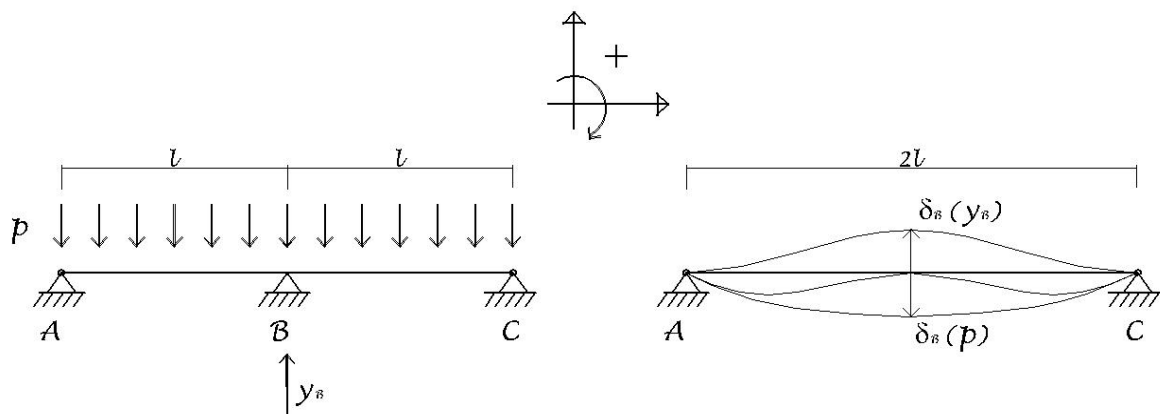
fra tutte le configurazioni equilibrate:

$$m_C - \sum_{i=1}^r M_{ir} = 0; \quad M_{BA} = M_{BC} = 0$$

$$4M_B = 6m = \frac{6}{12} pl^2; \quad M_B = \frac{1}{8} pl^2$$



Un altro SISTEMA PRINCIPALE si ottiene togliendo un vincolo sino all'isostaticità



eliminando l'appoggio centrale in B:

Equazione di congruenza alla traslazione verticale:

$$\delta_B(y_B) - \delta_B(p) = 0$$

l'unica che riporta gli appoggi a livello

$$\frac{8}{384} y_B \frac{(2l)^2}{EJ} = \frac{5}{384} 2pl \frac{(2l)^2}{EJ}; y_B = \frac{5}{4} pl$$

fra tutte le configurazioni equilibrate alla traslazione verticale

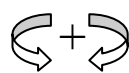
$$f_{yi} - \sum_{i=1}^r y_i = 0 \quad y_A = y_C = \frac{p \cdot 2l - y_B}{2} = \frac{3}{8} pl$$

si suppone l'assenza dei carichi concentrati nei nodi $f_v = 0$, il momento sull'appoggio centrale:

$$M_B = \frac{3}{8} pl^2 - \frac{pl^2}{2} = -M_B = -\frac{pl^2}{8}$$

si noti che il valore prima trovato di M_B positivo, come qui di y_B è dovuto al fatto che il verso presupposto per la reazione iperstatica è già concorde con quello della convenzione ipotizzata.

La risoluzione del sistema di equazioni fornisce pertanto una reazione iperstatica positiva, se questa venisse invece negativa, ne va cambiato il verso iniziale presupposto, in tal modo il diagramma dei momenti è sempre dalla parte delle fibre tese; nei calcoli precedenti M_B è stato posto con il verso giusto, se invece fossero stati posti ($M_{BA}; M_{BC}$) come da convenzione in accordo anche con la tradizione delle fibre tese inferiori positive, si sarebbe avuto



$$M_B + \frac{pl^2}{4} = 0 \rightarrow M_B = -\frac{pl^2}{4}$$

Il metodo degli spostamenti è quindi tanto meno oneroso nel calcolo a mano quanto più il sistema è poco iperstatico al contrario del metodo delle forze dopo delineato, per la trave a due campate tutta incastrata necessitano 3, anziché 1, equazioni di congruenza nel sistema risolvente, infatti risulta:

$$\left\{ \begin{array}{l} -M_A \frac{l}{3Ej} - M_{BA} \frac{l}{6Ej} + \frac{pl^3}{24EJ} = 0 \rightarrow -8M_A - 4M_{BA} + pl^2 = 0 \rightarrow M_A = \frac{pl^2}{8} - \frac{M_B}{2} \\ +M_C \frac{l}{3Ej} + M_{BC} \frac{l}{6Ej} - \frac{pl^3}{24EJ} = 0 \rightarrow 8M_C + 4M_{BC} - pl^2 = 0 \rightarrow M_C = \frac{pl^2}{8} - \frac{M_B}{2} \\ +M_A \frac{l}{6Ej} + M_{BA} \frac{l}{3Ej} - \frac{pl^3}{24EJ} = -M_{BC} \frac{l}{3Ej} - M_C \frac{l}{6Ej} + \frac{pl^3}{24EJ} \\ M_{BA} = M_{BC} = M_B \rightarrow -\frac{M_B}{2} + \frac{pl^2}{8} + 2M_B - \frac{pl^2}{4} = 2M_B + \frac{M_B}{2} - \frac{pl^2}{8} - \frac{pl^2}{4} \\ 3M_B = -\frac{pl^2}{4} + \frac{pl^2}{2} = -\frac{pl^2}{4} \rightarrow M_B = \frac{pl^2}{12} \end{array} \right.$$

Se si utilizza la completa simmetria delle travi allora si ritorna alla semplificazione di una sola equazione di congruenza essendo

$M_A = M_B = M_C$ risulta:

$$-M_A \frac{l}{3Ej} - M_B \frac{l}{6Ej} - \frac{pl^3}{24EJ} \rightarrow M_A = M_B = \frac{pl^2}{12EJ} \leftarrow \vartheta_A = \vartheta_B = \vartheta_C$$

ovvero si esamina una sola campata incastrata con tutte le considerazioni sui segni già svolte, il ricorso dei vantaggi della simmetria sarà utilizzata anche nel calcolo matriciale.

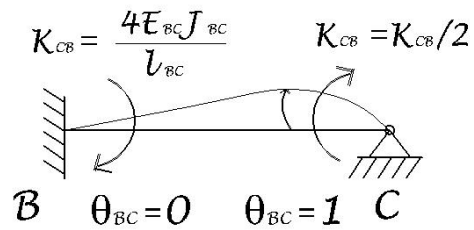
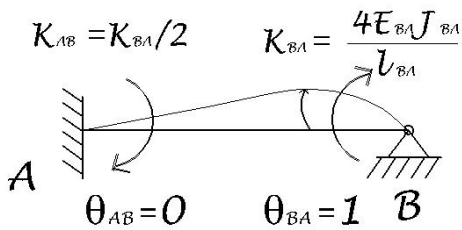
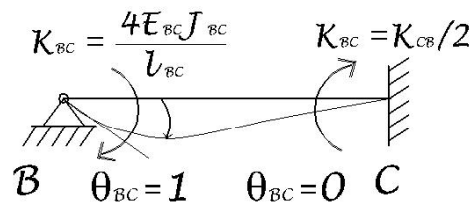
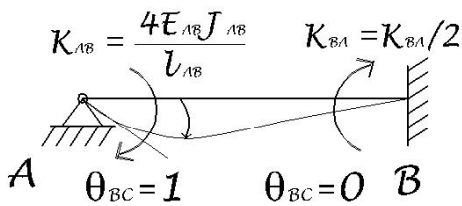
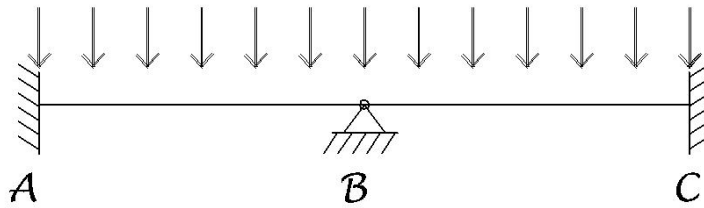
Il calcolo automatico non più legato al numero delle equazioni ha fatto scomparire l'uso dei calcoli qui svolti, dei quali però si sottolinea l'importanza didattica.

METODO DELL'EQUILIBRIO DELLE FORZE DI NAVIER, CLEBSCH, CROSS

Il SISTEMA PRINCIPALE si ottiene aggiungendo i vincoli d'incastro perfetto nei nodi e poi calcolando le reazioni iperstatiche rilassando un nodo alla volta imprimendogli rotazioni unitarie vantaggiose, come prima detto, per il calcolo automatico. Con le stesse precedenti ipotesi risulta:

$$\vartheta_A = \frac{l}{6EJ} (m_A + 2M_B) = 0 \quad M_B = -\frac{m_A}{2}$$

$$\vartheta_B = \frac{l}{6EJ} (2m_A + M_B) = \frac{m_A l}{4EJ}$$



Si cerca l'unica configurazione equilibrata per ogni nodo i

$$f_{xi} - \sum_{i=1}^r x_{ir} = 0; \quad f_{yi} - \sum_{i=1}^r y_{ir} = 0; \quad m_i - \sum_{i=1}^r M_{ir} = 0$$

tra tutte quelle congruenti delle varie aste confluenti nei nodi

$$M_{ir} = m_{ir} + K_{ir} (\vartheta_i + \frac{\vartheta_r}{2}) \quad (\text{si ipotizzano nodi fissi } \delta=0)$$

sostituendo nell'equazione di equilibrio risulta in ogni nodo i:

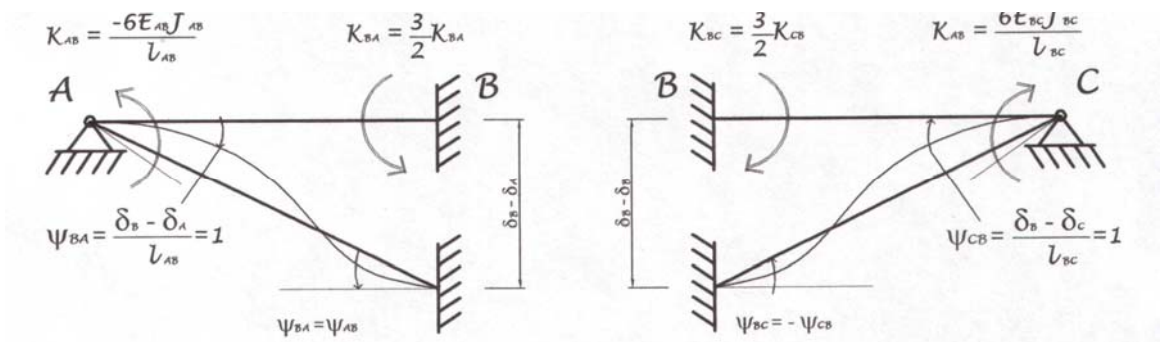
$$m_i = \sum_{i=1}^r m_{ir} + \sum_{i=1}^r K_{ir} \vartheta_i + \frac{l}{2} \sum_{i=1}^r K_{ir} \vartheta_r$$

$\vartheta_A = \vartheta_B = \vartheta_C = 0$ per travi simmetriche

$$M_{AB} = M_{BA} = M_{BC} = M_{CB} = m = \frac{pl^2}{12} \rightarrow M_B = \frac{pl^2}{12}$$

come con il metodo degli spostamenti duale del metodo delle forze per il rispetto del P.L.V..

Nel caso di rotazione e cedimento dei vincoli non perfetti, ovvero reali, ipotizzando di rimanere in campo elastico, ovvero sovrapponendo gli effetti ai carichi; sempre per il caso semplice di simmetria e $\delta_A = \delta_C = 0$



$$M_A = \frac{4EJ}{l} (\vartheta_A - \frac{\vartheta_B}{2} - \frac{3}{2} \frac{\delta_B}{l}) \quad Y_A = \frac{6EJ}{l^2} (\vartheta_B - \vartheta_A + \frac{2\delta_B}{l})$$

$$M_B = \frac{4EJ}{l} (2\vartheta_B - \vartheta_A + \frac{3}{2} \frac{\delta_B}{l}) \quad Y_B = \frac{6EJ}{l^2} (\vartheta_A - \vartheta_B - \frac{2\delta_B}{l})$$

sollecitazioni flettenti e reazioni vincolari da sovrapporre a quelle d'incastro perfetto m, Y .

Se cede solo l'appoggio centrale $\delta_B = \delta$ e $\vartheta_B = \vartheta$ il momento si riduce:

$$M_B = -\frac{1}{12} pl^2 + \frac{6EJ}{l^2} \delta$$

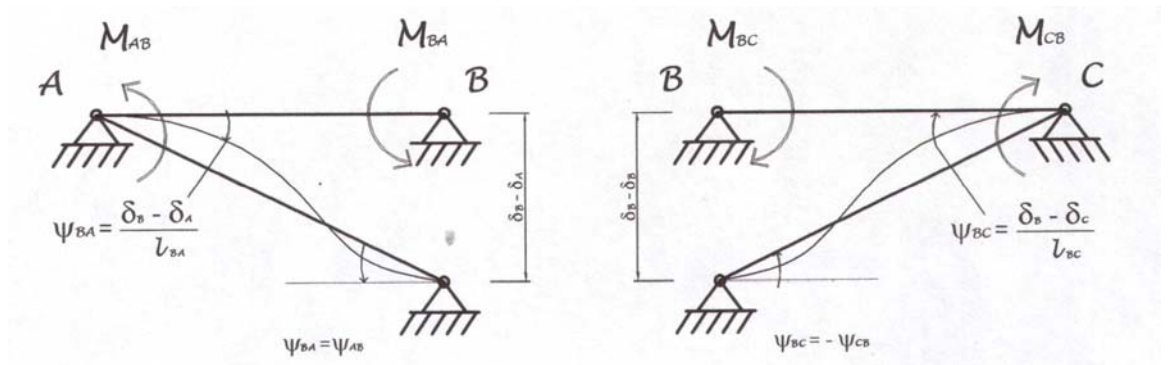
se invece si rilassano anche gli incastri all'estremità

$$M_B = -\frac{1}{8} pl^2 + \frac{3EJ}{l^2} \delta$$

viceversa se cedono solo gli appoggi all'estremità $\delta_A = \delta_C = \delta$ e $\delta = 0$ M_B si esalta a :

$$M_B = \frac{1}{8} pl^2 - 3 \frac{EJ}{l^2} \delta$$

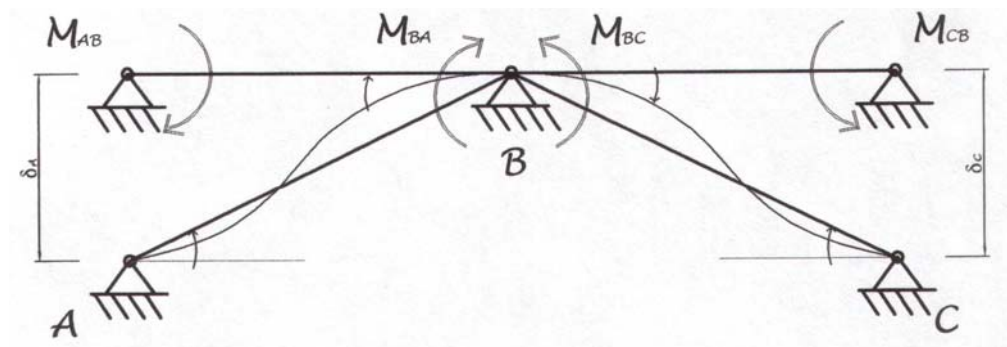
stesso risultano si ottiene con la precedente equazione dei 4 momenti



$$\frac{l_{BA}}{6E_{AB}J_{AB}}(M_A + 2M_B) + \frac{l_{BC}}{6E_{BC}J_{BC}}(2M_B + M_C) = \frac{\delta_B}{l_{AB}} + \frac{\delta_B}{l_{BC}} \rightarrow M_B = \frac{3EJ}{l^2} \delta$$

viceversa se cedono solo gli appoggi estremi $\delta_A = \delta_C = \delta$

$$\text{si esalta } M_B = -\frac{1}{8} pl^2 - 3 \frac{EJ}{l^2} \delta$$



$$\frac{l_{BA}}{6E_{AB}J_{AB}}(-M_A + 2M_B) + \frac{l_{BC}}{6E_{BC}J_{BC}}(2M_B - M_C) = -\frac{\delta_B}{l_{AB}} - \frac{\delta_B}{l_{BC}}$$

$$M_B = -\frac{1}{12} pl^2 + \frac{6EJ}{l^2} \delta \text{ per } \delta_A = \delta_C = \delta; M_A = M_B = M_C$$

si noti come la presenza di nodi spostabili, per cedimento differenziale come nel caso dei cedimenti dovuti ad assestamento del terreno di fondazione, rivoluzioni i diagrammi di sollecitazione reali dei telai, (Parte III, calcolo della trave di fondazione).

Risulta comunque prezioso riferimento per l'analisi strutturale, l'ipotesi di comportamento elastico della struttura.

$$\mathcal{G}_A = \mathcal{G}_C = \frac{pl^3}{24EJ} \quad \delta_{Bmax} = \mathcal{G}_C l = \frac{pl^4}{24EJ} - \frac{M_U l^2}{3EJ} \div \frac{l}{500}$$
$$\mathcal{G}_A = \mathcal{G}_C = 0 \quad \delta_{Bmax} = \mathcal{G}_C l = \frac{pl^4}{72EJ} - \frac{M_U l^2}{6EJ} \div \frac{l}{1500}$$

se le sezioni d'estremità non ruotano il cedimento differenziale massimo per raggiungere la plasticizzazione della sezione sull'appoggio centrale è molto più piccolo del caso in cui le sezioni di estremità delle travi ruotano come di solito avviene anche per adattamento viscoso.