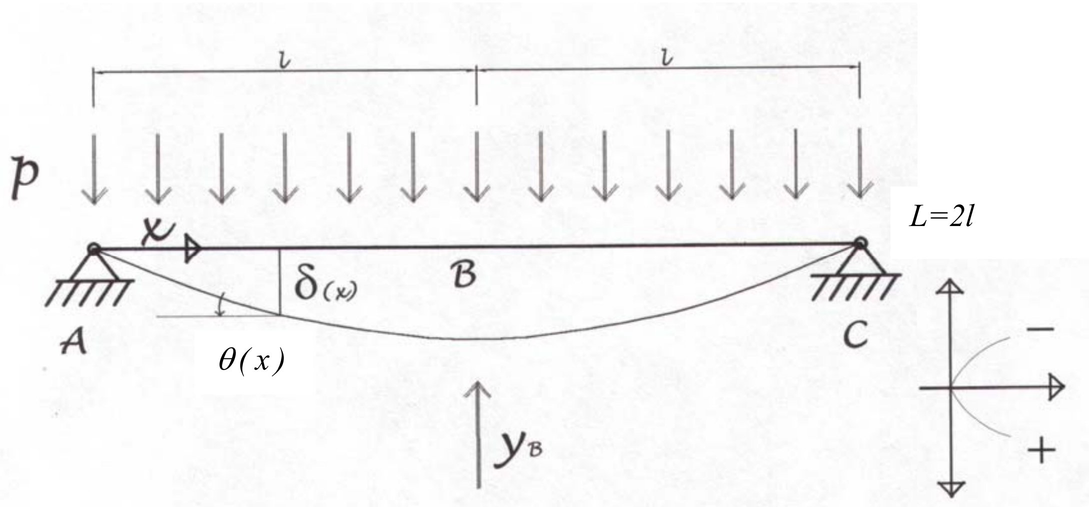
II.1.3. CALCOLO DIFFERENZIALE

LAVORO DI DEFORMAZIONE DI BETTY, CLAPEYRON, CASTIGLIANO- Linea Elastica



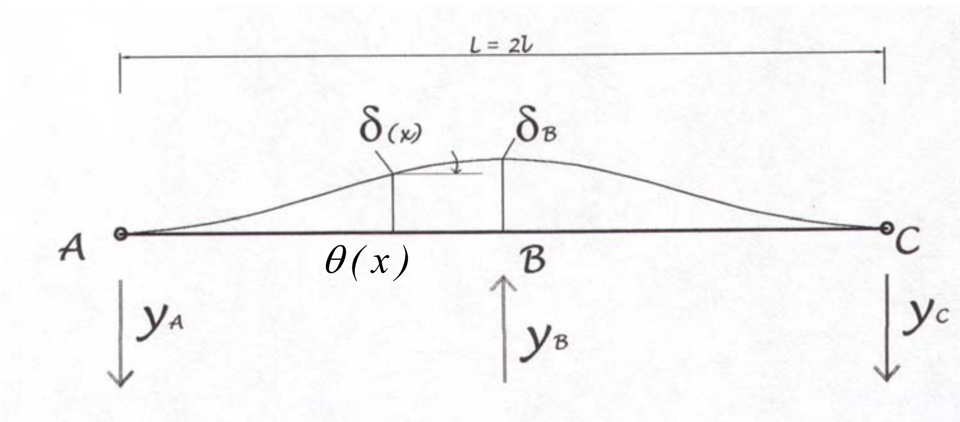
$$p(x) = cost = -\frac{dT}{dx} = -\frac{dM^2}{dx^2} = EJ\frac{d\vartheta^3}{dx^3} = EJ\frac{d\delta^4}{dx^4}$$

$$T(x) = -\frac{pL}{2} - px = -\frac{dM}{dx} = EJ\frac{d\theta^2}{dx^2} - EJ\frac{d\delta^3}{dx^3}$$

$$M(x) = -\frac{pL}{2}x - \frac{px^2}{2} = -EJ\frac{d\vartheta}{dx} = EJ\frac{d\delta^2}{dx^2}$$

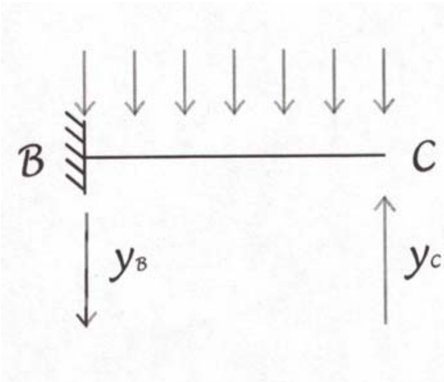
$$\vartheta(x) = -\frac{p}{2EJ}(\frac{x^3}{3} - \frac{Lx^2}{2} + \frac{L^3}{12} \rightarrow \vartheta_A = \frac{pL^3}{24EJ}$$

$$\delta(x) = -\frac{p}{24EJ}(x^4 - 2Lx^3 + L^3x) \rightarrow \delta_B = \frac{5}{384}\frac{pL^4}{EJ}$$



$$T(x) = -Y_A = cost$$
$$M(x) == -Y_A x$$
$$\vartheta(x) = -\frac{Y_B}{4EJ}x^2 - -\frac{Y_B}{16EJ}L^2;\ \ x = \frac{L}{2} \rightarrow \vartheta_B = 0$$
$$\delta(x) = -\frac{Y_B}{12EJ}x^3 - \frac{Y_B L^2}{16EJ}x;\ \ x = \frac{L}{2} \rightarrow \delta_B = -\frac{8}{384}\frac{Y_B L^4}{EJ} = -\frac{Y_B L^3}{48EJ}$$

La trave si può ridurre anche al sistema:



$$\delta(p) = -\frac{p}{EJ}(x^4 - \frac{l^3}{6}x + \frac{l^4}{8})$$
$$\delta(p) = -\frac{y}{EJ}(-\frac{x^3}{6} + \frac{l^2}{2}x - \frac{l^3}{3})$$
$$\delta(p;y) = -\frac{p}{8EJ}(-\frac{x^4}{3} + \frac{lx^3}{2} - \frac{l^3x}{6})$$

$$T(x) = px - y_C \qquad T^I(x) = -1$$
$$M(x) = -\frac{px^2}{2} + y_C X \qquad M^I(x) = X$$

Il lavoro dovuto al carico fittizio unitario iperstatico (sistema equilibrato) per effetto di spostamenti dovuti ai carichi e vincoli reali (congruenza)

$$\int_0^l \frac{MM'}{EJ}dx = 0 \ \rightarrow \ \int_0^l x\left(-\frac{px^2}{2} + y_c x\right)\frac{dx}{EJ} = 0$$
$$\frac{ql^4}{8EJ} = y_c\frac{l^3}{3EJ} \ \rightarrow \ y_c = \frac{3}{8}pl \ \rightarrow \ M_B = -\frac{1}{8}pl^2$$

<u>PRINCIPIO DEI LAVORI VIRTUALI:</u>

Il precedente calcolo scaturisce più incisivamente dal P.L.V. utilizzato per valutare le reazioni X iperstatiche (anziché lasciando incogniti gli spostamenti della linea elastica:

$$L_{est} = \int_0^l p \cdot ds \cdot x \cdot \bar{\delta}_p + \bar{X}_x x \bar{\delta}_x$$ (prodotto scalare)

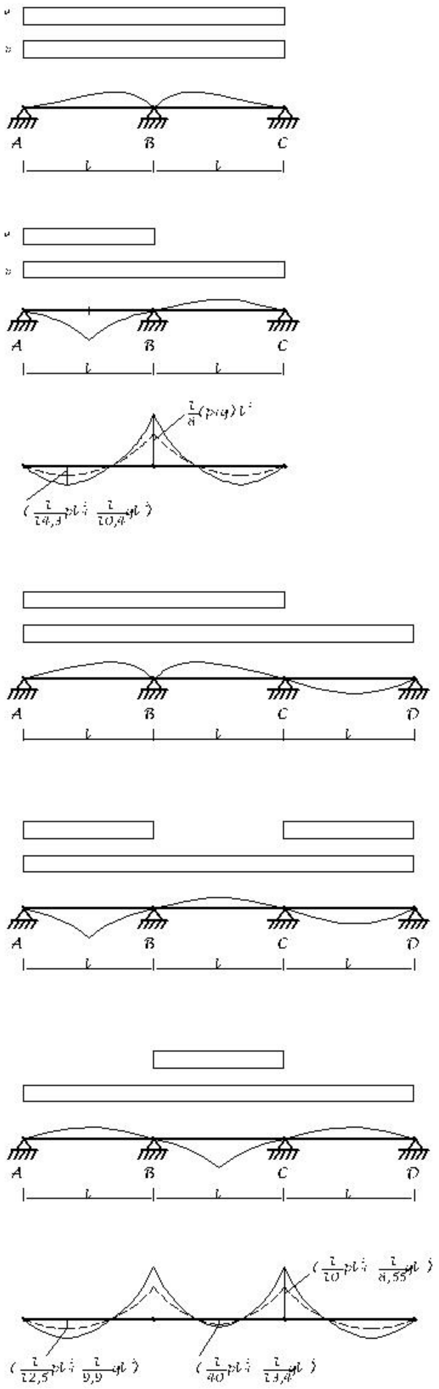
nell'ipotesi di altri vincoli R rigidi non spostabili ($\delta_R = 0$)

$$L_{int} = -\int_0^l M d\vartheta = \int_0^l \frac{MM}{EJ}ds$$

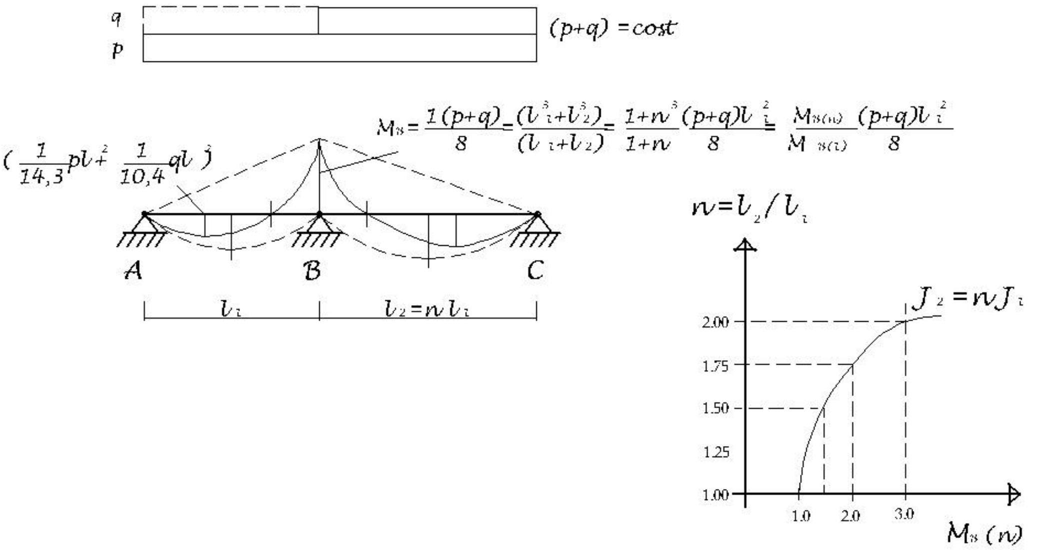
nell'ipotesi di trascurare N,T e il momento torcente per i quali $L_{est} = L_{int} = 0$, condizione necessaria e sufficiente per l'equilibrio della struttura che è la somma dei lavori di tutte le forze esterne agenti , sia nullo per qualsiasi insieme di spostamenti virtuali piccolissimi e compatibili con i vicoli se i corpi sono rigidi, se invece sono deformabili ed in particolare elastici, nel bilancio si deve aggiungere il lavoro delle sollecitazioni interne comprese quelle iperstatiche.

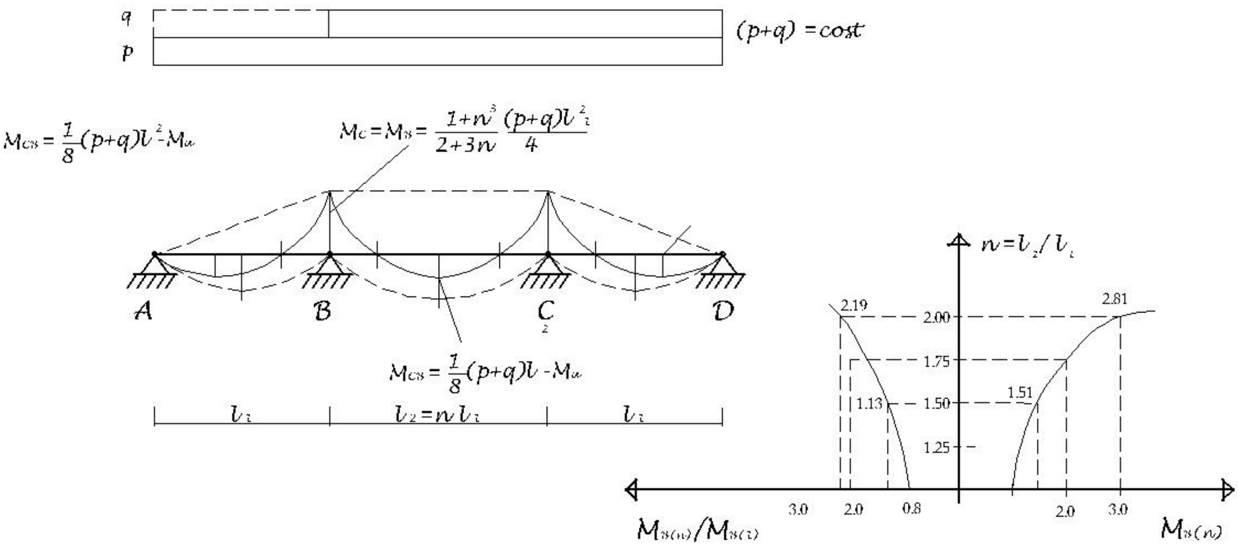
IMPIEGO DELLA LINEA ELASTICA PER LA VALUTAZIONE DELLE SOLLECITAZIONI MASSIME (diagrammi di inviluppo delle sollecitazioni)

$l = cost \qquad J = cost$



$$l_1 \neq l_2 \qquad J_1 = J_2$$





Il momento massimo all'appoggio centrale vale:

$$l_1 \neq l_2 \qquad J_1 \neq J_2$$

$$M_B = \frac{3}{2}\frac{\mu_{AB}K_{BC} + \mu_{BC}K_{BA}}{K_{BA} + K_{BC}} = \frac{1}{8}(p+q)\frac{l_1^2 J_2 / l_2 + l_2^2 J_1 / l_1}{J_2 / l_2 + J_1 / l_1}$$

$$\mu_{AB} = \frac{1}{12}(p+q)l_1^2; \qquad \mu_{BC} = \frac{1}{12}(p+q)l_2^2$$

$$K_{BA} = \frac{3EJ_1}{l_1}; \qquad K_{BC} = \frac{3EJ_2}{l_2};$$

La dissimmetria delle luci $l_1 = l_2$ si può compensare con quella delle rigidezze, peraltro parziale se $K_{AB}=K_{BC}$

$$M_B = \frac{1}{8}(p+q)l_1^2\left(\frac{1+n^2}{2}\right)$$

$$M_B = \frac{1}{8}(p+q)l_1 l_2$$

$$J_2 = n\, J_2$$

$$J_2 = n^2\, J_1$$