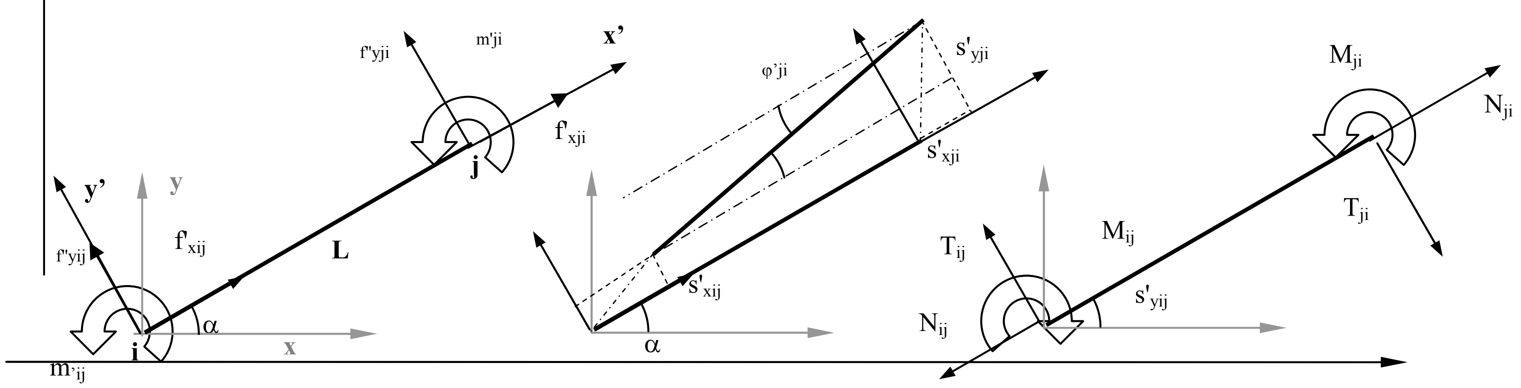
II.1.4 CALCOLO MATRICIALE

METODO DEGLI ELEMENTI FINITI TIPO BEAM ELEMENTS

Problema monodimensionale: asta omogenea isotropa con i carichi lungo l'asta ricondotti all'estremità considerata d'incastro perfetto ai nodi e sommati agli eventuali carichi concentrati ai nodi.



Statica: equazione di equilibrio, matrice statica D^T trasposta della cinematica D:

$$\begin{cases} N = f'_{x\,ji} - f'_{x\,ij} \\ T = f'_{yij} - f'_{yji} + \dfrac{m_{ji}}{L} \\ M = m'_{ji} - m'_{ij} \end{cases} \quad \begin{Bmatrix} N \\ T \\ M \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & L \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} f'_{xij} \\ f'_{yij} \\ m'_{ij} \\ f'_{xji} \\ f'_{yji} \\ m'_{ji} \end{Bmatrix} ; \begin{Bmatrix} f'_{xij} \\ f'_{yij} \\ m'_{ij} \\ f'_{xji} \\ f'_{yji} \\ m'_{ji} \end{Bmatrix} = D^T \begin{Bmatrix} N \\ T \\ M \end{Bmatrix}$$

Cinematica: equazione di compatibilità, matrice cinematica D (Displacements)

$$\begin{cases} \Delta s'_x = s'_{xji} - s'_{xij} \\ \Delta s'_y = s'_{yij} - s'_{yji} + L\varphi_{ji} \\ \Delta\varphi' = \varphi'_{ji} - \varphi'_{ij} \end{cases} ; \quad \begin{Bmatrix} \Delta s'_x \\ \Delta s'_y \\ \Delta\varphi' \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & L \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} s'_{xij} \\ s'_{yij} \\ \varphi'_{ij} \\ s'_{xji} \\ s'_{yji} \\ \varphi'_{ji} \end{Bmatrix} = D \begin{Bmatrix} s'_{xij} \\ s'_{yij} \\ \varphi'_{ij} \\ s'_{xji} \\ s'_{yji} \\ \varphi'_{ji} \end{Bmatrix}$$

Reologia: equazione costitutiva: matrice di rigidezza K

$$
\begin{cases}
N = \dfrac{EA}{L}\left(s'_{xji} - s'_{xij}\right) = \dfrac{EI}{L\rho^2}\left(s'_{xji} - s'_{xij}\right) \\
T = \dfrac{12EI}{L^3}\left(s_{yij} - s'_{yji}\right) - \dfrac{6EI}{L^2}\left(\varphi'_{ij} + \varphi'_{ji}\right) \\
M = -\dfrac{6EI}{L^2}\left(s_{yij} - s'_{yji}\right) + \dfrac{4EI}{L}\left(\varphi'_{ji} - \varphi'_{ij}\right)
\end{cases}
\qquad
\begin{Bmatrix} N \\ T \\ M \end{Bmatrix} =
\begin{bmatrix}
\dfrac{EA}{L} & 0 & 0 \\
0 & \dfrac{12EI}{L^3} & -\dfrac{6EI}{L^2} \\
0 & \dfrac{-6EI}{L} & \dfrac{4EI}{L}
\end{bmatrix}
\begin{Bmatrix} \Delta s'_x \\ \Delta s'_y \\ \Delta\varphi' \end{Bmatrix}
= [K] \begin{Bmatrix} \Delta s'_x \\ \Delta s'_y \\ \Delta\varphi' \end{Bmatrix}
$$

Si collegano le forze generiche all'estremità con gli spostamenti compatibili:

$$
\begin{Bmatrix} f'_{xij} \\ f'_{yij} \\ m'_{ij} \\ f'_{xji} \\ f'_{yji} \\ m'_{ji} \end{Bmatrix}
= D^T \begin{Bmatrix} N \\ T \\ M \end{Bmatrix}
= D^T \begin{bmatrix}
\dfrac{EA}{L} & 0 & 0 \\
0 & \dfrac{12EI}{L^3} & -\dfrac{6EI}{L} \\
0 & -\dfrac{6EI}{L^2} & \dfrac{4EI}{L}
\end{bmatrix}
\begin{Bmatrix} \Delta s'_x \\ \Delta s'_y \\ \Delta\varphi' \end{Bmatrix}
= D^T [K] D \begin{Bmatrix} s'_{xij} \\ s'_{yij} \\ \varphi'_{ij} \\ s'_{xji} \\ s'_{yji} \\ \varphi'_{ji} \end{Bmatrix}
$$

Matrice di rigidezza nel riferimento locale risulta:

$$
[K'] = D^T [K] D =
\begin{bmatrix} -1\,0\,0 \\ 0\,1\,0 \\ 0\,0\,{-1} \\ 1\,0\,0 \\ 0\,{-1}\,0 \\ 0\,L\,1 \end{bmatrix}
[K]
\begin{bmatrix} -1\,0\,0 & 1\,0\,0 \\ 0\,1\,0 & 0\,{-1}\,L \\ 0\,0\,{-1} & 0\,0\,1 \end{bmatrix}
= \frac{EI}{L}
\begin{bmatrix}
\dfrac{1}{\rho^2} & 0 & 0 & -\dfrac{1}{\rho^2} & 0 & 0 \\
0 & \dfrac{12}{L^2} & \dfrac{6}{L} & 0 & \dfrac{-12}{L^2} & \dfrac{6}{L} \\
0 & \dfrac{6}{L} & 4 & 0 & \dfrac{-6}{L} & 2 \\
-\dfrac{1}{\rho^2} & 0 & 0 & \dfrac{1}{\rho^2} & 0 & 0 \\
0 & \dfrac{-12}{L^2} & \dfrac{-6}{L} & 0 & \dfrac{12}{L^2} & \dfrac{-6}{L} \\
0 & \dfrac{6}{L} & 2 & 0 & \dfrac{-6}{L} & 4
\end{bmatrix}
$$

La matrice, trascurando il contributo alla flessione del taglio, si semplifica in:

$$
\frac{EI}{L}\begin{bmatrix} \dfrac{1}{\rho^2} & -\dfrac{1}{\rho^2} \\ -\dfrac{1}{\rho^2} & \dfrac{1}{\rho^2} \end{bmatrix} \qquad \text{essendo } I = A\rho z
$$

strutture reticolari ed archi nei quali prevale N evidenziando la rigidezza NL/EA per travi continue e telai nei quali prevale M, la matrice si semplifica invece in:

$$\frac{EI}{L}\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

per travi continue e telai nei quali prevale M, ritrovando i coefficienti dell'equazione dei 4 momenti.

In presenza di torsione e flessione, ovvero nello spazio, ed assenza di sforzo normale basta inserire nella predetta matrice di rigidezza il termine GI/L al posto di EA/L essendo G = E/2 (1+ν) il modulo di scorrimento.

Se si esplicita la predetta matrice di relazione forza - spostamenti nel riferimento locale si ha:

$$\begin{cases} f'_{xij} = \frac{EA}{L}\left(s'_{xji} - s'_{xij}\right) \\ f'_{yij} = \frac{12EI}{L^3}\left(s'_{yij} - s'_{yji}\right) + \frac{6EI}{L^2}\left(\varphi_{ij} + \varphi_{ji}\right) \\ m'_{ij} = \frac{6EI}{L^2}\left(s'_{yij} - s'_{yji}\right) + \frac{4EI}{L}\varphi_{ij} + \frac{2EI}{L}\varphi_{ji} \\ f'_{xji} = \frac{EA}{L}\left(-s'_{xij} + s'_{xji}\right) \\ f'_{yji} = \frac{12EI}{L^3}\left(-s'_{yij} + s_{yji}\right) + \frac{6EI}{L^2}\left(-\varphi_{ij} - \varphi_{ji}\right) \\ m'_{ji} = \frac{6EI}{L^2}\left(s'_{yij} - s'_{yji}\right) + \frac{2EI}{L}\varphi_{ij} + \frac{4EI}{L}\varphi_{ji} \end{cases}$$

In particolare si ritrovano l'espressione dei momenti vista con il metodo dell'equilibrio in funzione dei cedimenti dei vincoli ovvero della variazione angolare rigida $\Psi'_{ij} = \left(s_{yij} - s'_{yji}\right)/L$.

Per passare dal riferimento locale a quello globale si deve introdurre la matrice di trasferimento T o di proiezione delle componenti di L o matrice di rotazione degli assi di riferimento:

$$\begin{Bmatrix} f_{xij} \\ f_{yij} \\ m_{ij} \\ f_{xji} \\ f_{yji} \\ m_{ji} \end{Bmatrix} = [T] \begin{Bmatrix} f'_{xij} \\ f'_{yij} \\ m'_{ij} \\ f'_{xji} \\ f'_{yji} \\ m'_{ji} \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} f'_{xij} \\ f'_{yij} \\ m'_{ij} \\ f'_{xji} \\ f'_{yji} \\ m'_{ji} \end{Bmatrix}$$

ed analogamente per $\{s\} = [T]\ \{s'\}$ per cui sostituendo in $\{f'\} = [K']\ \{s'\}$

$$\{f\} = [T]\ [K'][T]^T \{s\} = [K]\ \{s\}$$

ovvero la matrice di rigidezza globale [K] si ottiene da quella locale[K'] moltiplicandola per la matrice di trasferimento. Per $\varphi = 90°$ come nei telai usuali [T] si semplifica, essendo $\cos\varphi = 0$; $\operatorname{sen}\varphi = 1$, e lo sforzo normale e il taglio nei pilastri si inverte ai nodi per le travi.

Il metodo degli elementi finiti, rappresenta un metodo estremamente valido per la risoluzione di strutture che non siano facilmente riconducibili a modelli semplici.

E' un metodo che, con l'ausilio di calcolatori programmabili, è in grado di fornire tutte le componenti di spostamento dei singoli elementi della struttura, nonché il relativo stato tensionale.

Esso può essere così brevemente riassunto.

Elementi necessari per formare la matrice di rigidezza dell'elemento:

- lunghezza l
- sezione A
- momento d'inerzia I=J
- modulo elastico E
- posizione nel sistema di riferimento globale α

Per ogni asta, in base al predimensionamento, si imposta la matrice [K] di "rigidezza" che risulta essere simmetrica, come prima esaminato, e così costituita trascurando solo il contributo del taglio:

$EA/l\ C^2$+ $12EJ/l^3\ S^2$	$EA/l\ SC$- $12EJ/l^3\ SC$	$-\ 6EJ/l^2\ S$	$-EA/l\ C^2$- $12EJ/l^3\ S^2$	$-EA/l\ SC$+ $12EJ/l^3\ SC$	$-\ 6EJ/l^2\ S$

	$EA/l\ S^2+$ $12EJ/l^3\ C^2$	$6EJ/l^2\ C$	$-EA/l\ SC+$ $12EJ/l^3\ SC$	$-EA/l\ S^2-$ $12EJ/l^3\ C^2$	$6EJ/l^2\ C$
		$4EJ/l$	$6EJ/l^2\ S$	$-6EJ/l^2\ C$	$2EJ/l$
			$EA/l\ C^2+$ $12EJ/l^3\ S^2$	$EA/l\ SC-$ $12EJ/l^3\ SC$	$6EJ/l^2\ S$
	SIMM.			$EA/l\ S^2+$ $12EJ/l^3\ C^2$	$-6EJ/l^2\ C$
					$4EJ/l$

essendo $C=\cos\alpha$ ed $S=\operatorname{sen}\alpha$

Per ogni asta si determina il vettore dei carichi nodali, ovvero l'azione che i carichi agenti sulle aste trasmettono ai nodi.

Essi devono essere riferiti al riferimento locale dell'asta, e quindi moltiplicati per la predetta matrice proiezione [T];

Al vettore dei carichi nodali, vanno aggiunti i carichi concentrati direttamente sui nodi in particolare dei momenti.

Si richiama inoltre, specie per i carichi dinamici, l'importanza del "centraggio" del sistema di masse con quello delle rigidezze..

Si avrà così un sistema di 6 equazioni in 6 incognite (gli spostamenti di estremità) per ogni asta considerata, con il vettore dei carichi nodali quale vettore dei termini noti.

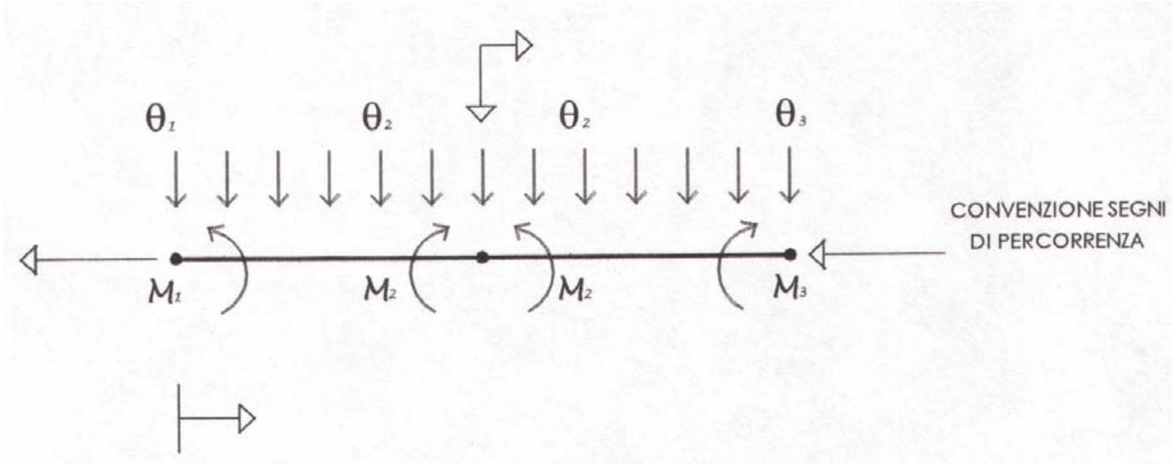
Risolvendo il sistema si avrà l'intero campo degli spostamenti delle aste.

Moltiplicando il vettore degli spostamenti così ottenuti per la matrice proiezione [T] per ogni singola asta, si otterranno i medesimi nel riferimento locale.

Nota la matrice di rigidezza dell'asta si devono parallelamente:

- scegliere i gradi di libertà $\delta_x=1$, $\delta_y=1$, $\varphi=1$, o i gradi di vincolo $\delta_x 0$, $\delta_y=0$, $\varphi=0$ di ciascuna estremità d'asta.
- numerare i vari nodi ed i vari elementi, definendo le coordinate dei nodi per cui: $l=\sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2}$; $\cos\alpha = \frac{x_j - x_i}{l}$; $\operatorname{sen}\alpha = \frac{y_j - y_i}{l}$
- definire la matrice delle incidenze nel contesto strutturale fra elementi e nodi per effettuare l'assemblaggio delle matrici di rigidezza delle varie aste.

b) MATRICE DI FLESSIBILITA' DI UNA TRAVE CON CARICHI



$$\begin{Bmatrix}\vartheta_1\\ \vartheta_2\end{Bmatrix} = \frac{1}{EJ}\begin{bmatrix}\frac{l}{3} & -\frac{l}{6}\\ -\frac{l}{6} & \frac{l}{3}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}M_1\\ M_2\end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix}\frac{pl^3}{24EJ}\\ \frac{pl^3}{24EJ}\end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix}M_1\\ M_2\end{Bmatrix} = \frac{1}{EJ}\begin{bmatrix}\frac{l}{3} & -\frac{l}{6}\\ -\frac{l}{6} & \frac{l}{3}\end{bmatrix}^{-1}\begin{Bmatrix}\varphi_1\\ \varphi_2\end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix}0\\ 0\end{Bmatrix} = \frac{2EJ}{l}\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\vartheta_1\\ \vartheta_2\end{Bmatrix}$$

risolta l'inversione di matrice tramite il determinante e la trasposta si ritrova l'EQUAZIONE DEI 3 MOMENTI per $M_1 = M_3 = 0$ e $\vartheta_1 = \theta_3 = \frac{pl^3}{24EJ}$.

Assemblando si ritrova $M_2 = -\frac{pl^2}{8}$.

Si noti che a differenza della flessibilità e della rigidezza di un estremo di una trave che risultano una l'inversa dell'altra., nel caso della matrice di un elemento, invertendo la matrice di flessibilità dell trave appoggiata all'estremità si ottiene la matrice di rigidezza della trave incastrata all'estremità si passa quindi dall'elemento finito del Metodo delle Forze a quello caratteristico del Metodo degli Spostamenti, prima delineato.