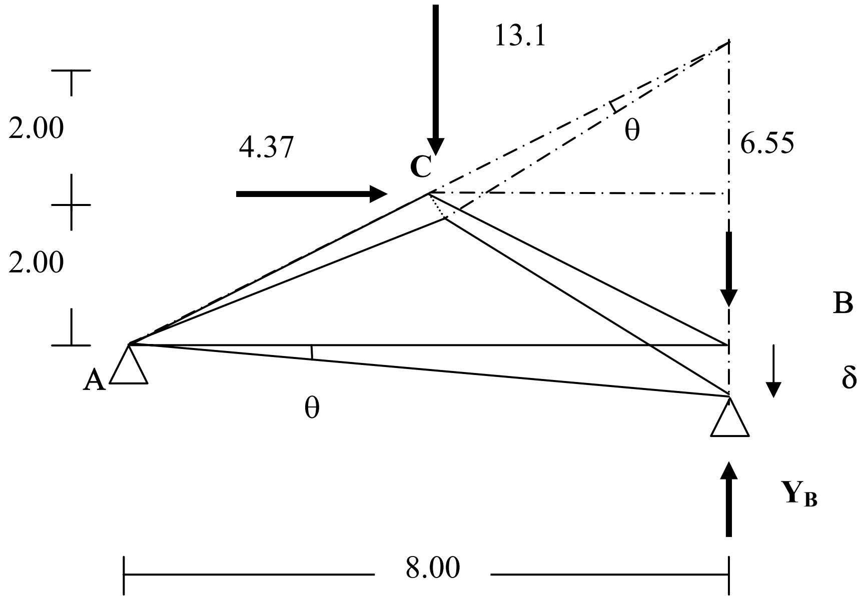
II.2.3 CALCOLO DIFFERENZIALE:

a) <u>ANALISI CON IL P.L.V. ESTERNO - CAPRIATA ISOSTATICA</u>

Senza ridurre la generalità di applicazione del metodo, si sceglie, per semplicità, lo schema di trave reticolare con carichi concentrati ai nodi (C_s=0,33)

Reazione vincolare esterna

Imponendo come incognita il cedimento del carrello B, si ottiene il seguente cinematismo:



$\delta_{YB} = \delta = 8.0\ \theta$
$\delta_{YC} = \delta/2 = 4.0\ \theta$
$\delta_{XC} = \delta/4 = 2.0\ \theta$

$(-Y_B + 6.55)\ 8\theta + 13.1 \times 4\theta + 4.37 \times 2\theta = 0$

$-4Y_B + 4 \times 6.55 + 2 \times 13.1 + 4.37 = 0$

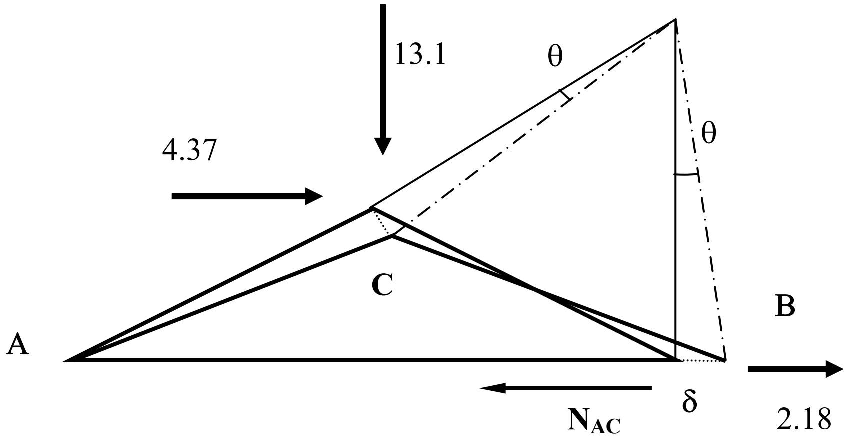
$4\ Y_B = 56.77$

$\mathbf{Y_B = 14.19t}$

Sforzo normale nella catena

Calcolo della reazione interna nel tirante; per le altre reazioni il procedimento risulta analogo.

$\delta_B = 4.0\ \theta$
$\delta_{XC} = 2.0\ \theta$
$\delta_{YC} = 4.0\ \theta$



$N_{AC} \times 4\theta = 13.1 \times 4\theta + 4.37 \times 2\theta - 2.18 \times 4\theta = 0$

$\mathbf{N_{AC} = -\ 17.5t}$

b) <u>CON IL P.L.V. ESTERNO ED INTERNO - STRUTTURA RETICOLARE IPERSTATICA ELASTICA</u>

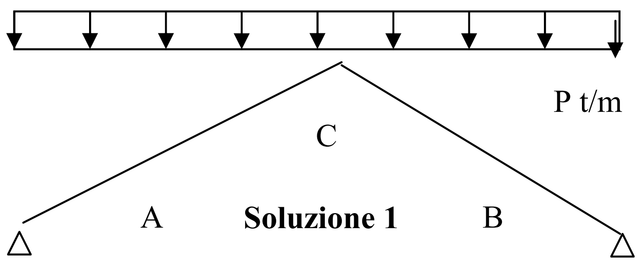
Per la trattazione del caso della capriata con vincoli iperstatici, partiremo dalle seguenti approssimazioni:

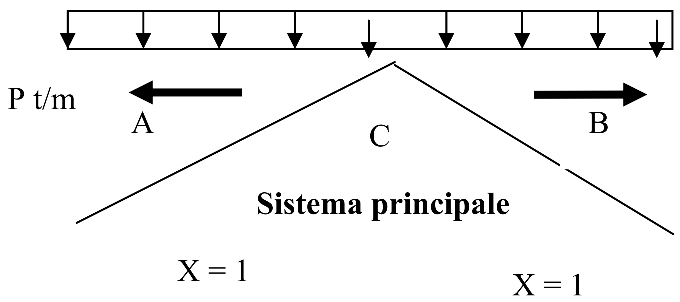
- i vincoli alla base sono stati considerati come due cerniere fisse, ovvero le aste sono considerate perfettamente rigide;
- il nodo al colmo, è stato assimilato ad un incastro perfetto;
- l'azione sismica è stata posta pari sia a pari a 0.33 del carico verticale, per voluto confronto alla trattazione con il caso isostatico, sia, più congruamente al campo elastico iperstatico, pari a 0.1 del medesimo carico. come verifica di norma allo stato limite di esercizio.

METODO DELLE FORZE

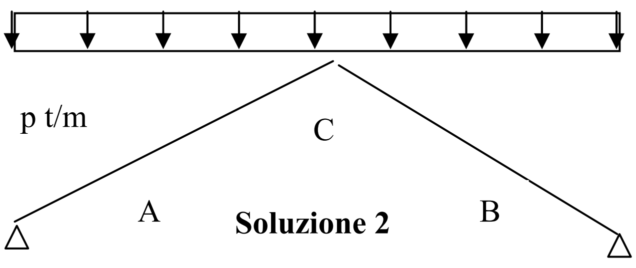
Si forniscono, qui di seguito, due soluzioni del problema iperstatico con il metodo delle forze, per poi riportare le sole rezioni vincolari ed i diagrammi di sforzo normale, taglio e momento flettente.

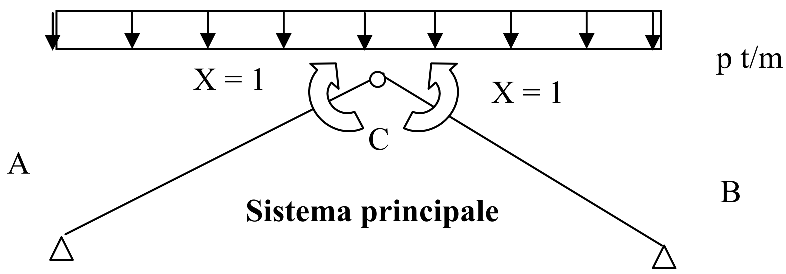
Per semplificare i calcoli si tratterà il caso dapprima dei soli carichi verticali, ricorrendo a due sistemi principali diversi.





In questo primo caso vengono sbloccate le cerniere e rese carrelli; le incognite iperstatiche, data la simmetria della struttura e dei carichi sono rappresentate dalla reazione orizzontale X.

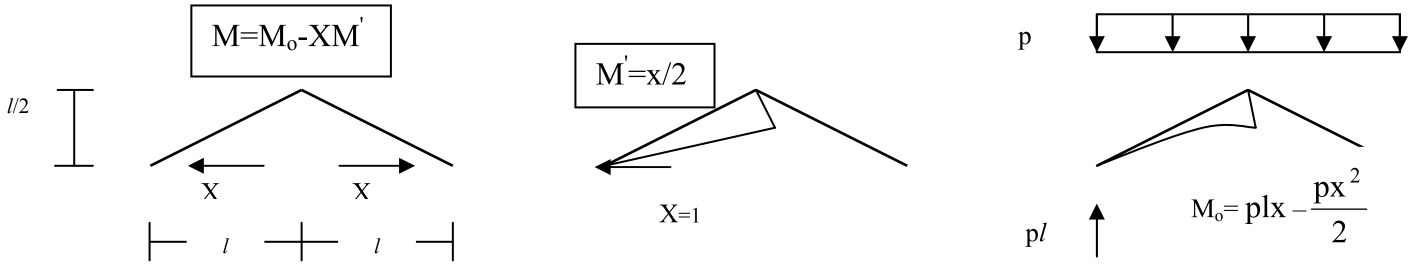




In questo secondo caso, invece, l'incastro al colmo viene reso cerniera, mentre l'incognita iperstatiche è rappresentata dal momento esercitato dall'incastro.

Segue la trattazione analitica dei due casi.

Soluzione 1



Tramite il Principio dei Lavori Virtuali, assunto che il lavoro funzione di NN' non si esplica in quanto le aste sono considerate infinitamente rigide ovvero la rigidezza EA=∞, risulta:

$$L_i = \int_o^1 \frac{MM'}{EI} dx = \int_o^1 \frac{(M_o - XM')M'}{EI} dx = 0$$

$$X\int_o^1 \frac{M'^2}{EI} dx = \int_o^1 \frac{M_o M'}{EI} dx$$

$$X\int_o^l \left(\frac{x}{2}\right)^2 dx = \int_o^l \left(plx - \frac{px^2}{2}\right)\frac{x}{2} dx$$

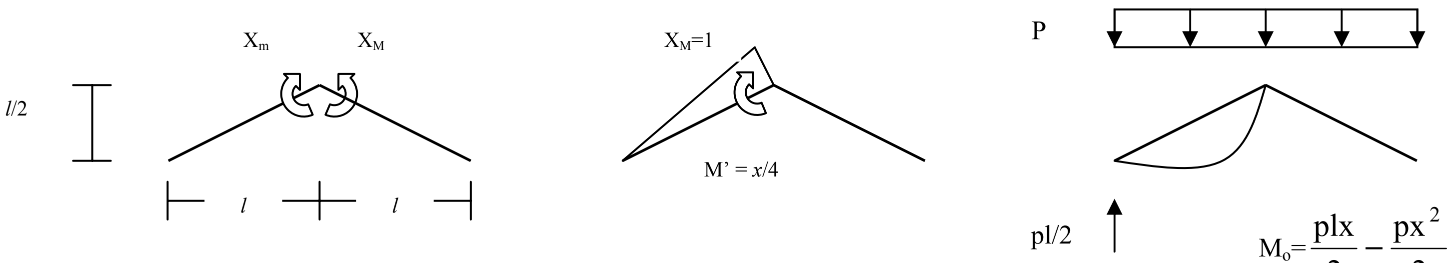
$$X\left[\frac{x^3}{12}\right]_o^1 = \left[\frac{plx^3}{6} - \frac{px^4}{16}\right]_o^1 ;\ X = \frac{5}{4} pl$$

il verso risulta concorde a quello scelto per l'incognita iperstatica

per x=1 risulta $M = pl^2 - \frac{pl^2}{2} - \frac{5}{4} pl \cdot \frac{1}{2} = -\frac{1}{8} pl^2$

Il momento è uguale a quello del solaio a due campate di luci l (v. B 5) nel quale lo sforzo normale non è presente, per cui non ci sono spinte sui muri d'ambito. Tali spinte nella capriata sono eliminate da una catena molto rigida realizzabile anche precomprimendola congruamente in modo da bilanciare il lavoro funzione di NN' come indicato più avanti.

Soluzione 2



$M_o = \dfrac{plx}{2} - \dfrac{px^2}{2}$

Tramite il Principio dei Lavori Virtuali:

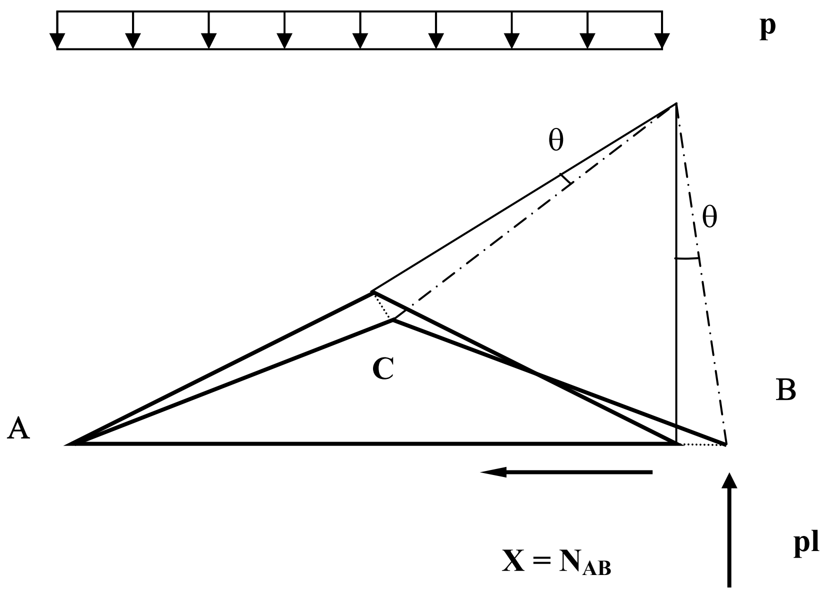
$$L_i = \int_o^l \frac{M'^2}{EI}dx + \int_o^l \frac{M_o M'}{EI}dx = 0$$

$$\frac{X_M}{EI}\int_o^l \left(\frac{x}{4}\right)^2 dx + \frac{1}{EI}\int_o^l \left(\frac{pl}{2}x - p\frac{x^2}{2}\right)\frac{x}{4}dx = 0$$

$$X_M \frac{l^3}{48} + \left[\frac{plx^3}{24} - \frac{px^4}{32}\right]_o^l = 0 \;;\; X_M = -\frac{pl}{2}$$

per x = l risulta $M = \dfrac{pl^2}{2} - \dfrac{pl^2}{2} - \dfrac{pl}{2}\dfrac{1}{4} = -\dfrac{1}{8}pl^2$ come nella prima soluzione con l'altro sistema principale di calcolo.

Se le aste invece sono allungabili ovvero non sono perfettamente rigide, risulta:



la reazione iperstatica X si ricava da:

N_{AC}=-pl senα-Xcosα ; N'=-1cosα

M_{AC}=plx cosα-$\frac{px^2}{2}$cosα-Xxsenα ; M'=-1xsenα

Tramite il Principio dei Lavori Virtuale risulta:

$$\frac{2}{EA}\int_o^l \left(-plsen\alpha - X\cos\alpha\right)\left(-\cos\alpha\right)dx + \frac{2}{EI}\int_o^l \left(plx\cos\alpha - \frac{px^2}{2}\cos\alpha - Xxsen\alpha\right)\left(-xsen\alpha\right)dx = 0$$

$$X = \frac{pl^2\left(\frac{5l^2}{12I} - \frac{2}{A}\right)\mathrm{sen}\,\alpha\cos\alpha}{2\left(\frac{l^3}{3I}\mathrm{sen}^2\,\alpha + \frac{l}{A}\cos^2\alpha\right)}$$

per EA=∞ ovvero biella rigida si ritrova $X_\infty=\frac{5}{4}pl$ essendo tgα=1/2 ovvero

$$X_\infty=\frac{5}{4}\cdot 3{,}295\cdot 4{,}0=16{,}47t$$

$$I=\frac{bb^3}{12}=\frac{0{,}3^4}{12}=6{,}75\cdot 10^{-4}m^4$$

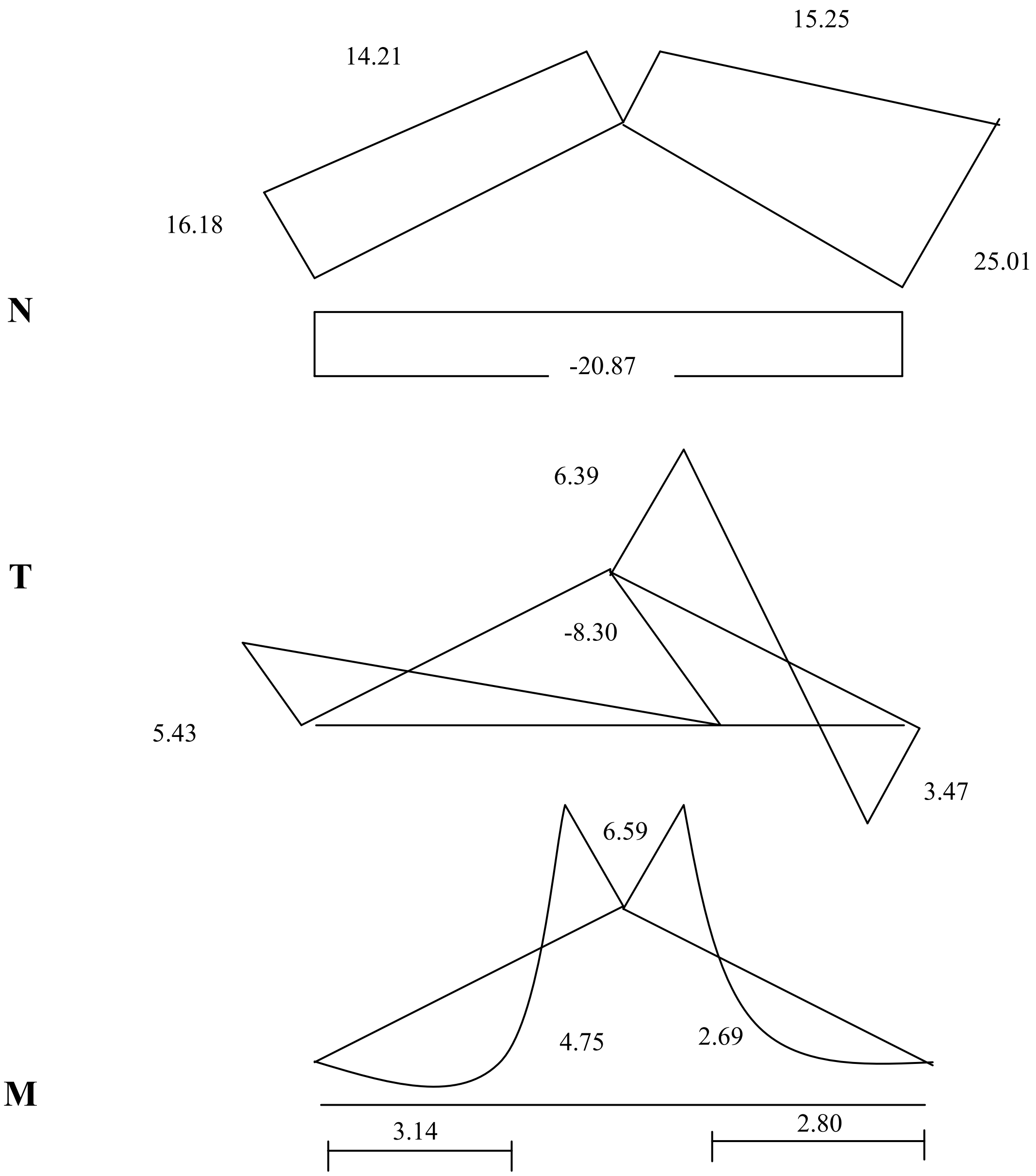
$$X=\frac{3{,}295\times 4{,}0\left(\frac{5\times\overline{4{,}0^2}}{12\times 6{,}75\times 10^{-4}}-\frac{2}{\overline{0{,}3^2}}\right)0{,}446\times 0{,}895}{2\left(\frac{\overline{4{,}0^3}}{3\times 6{,}75\times 10^{-4}}\overline{0{,}446^2}+\frac{40}{0{,}3^2}\overline{0{,}895^2}\right)}=16{,}37t$$

I muri d'ambito si devono spostare in sommità di $\frac{16370\times 800}{95000\times 900}=0{,}15\mathrm{cm}$.

La presenza delle azioni orizzontali sismiche di seguito calcolate aumenta tali spostamenti che
devono rimanere ammissibili progettando idoneamente i ritegni della capriata sui muri.

c) DIAGRAMMI DELLE SOLLECITAZIONI

Capriata Iperstatica con azione sismica pari a condizioni limite ultime C_s = 0,33



Per il calcolo delle equazioni dei momenti delle due aste AC e CB, si procede come segue:

Asta AC

$M(x) = (-x^2/2 + 7/4x - 1/4x)P + (- x^2/8 + 8/16x)q =$
$= (-x^2/2 + 3/2x)P + (- x^2/8 + 8/16x)q =$
$= (-P/2 - q/8)\ x^2 + (3/2P + q/2)\ x =$
$-1.922\ x^2 + 6.04\ x$

$M(x) = 0$ per: $x = 0$; $x = 3.14$
$M'(x) = 2.844x + 6.041$
$M'(x) = 0$ per $x = 1.57$
$\mathbf{M_{max}}$ = 4.75 tm

Asta CB

$M(x) = (-x^2/2 + 7/4x - 1/4x)P - (-x^2/8 + 1/2x)q$
$= (-P/2 + q/8)x^2 + (3/2P - 1/2q)x =$
$= - 1.37x^2 + 3.84x$

$M(x) = 0$ per $x = 0$; $x = 2.8$
$M'(x) = -2.74x + 3.84$
$M'(x) = 0$ per $x = 1.4$
$\mathbf{M_{max}}$ = 2.69 tm

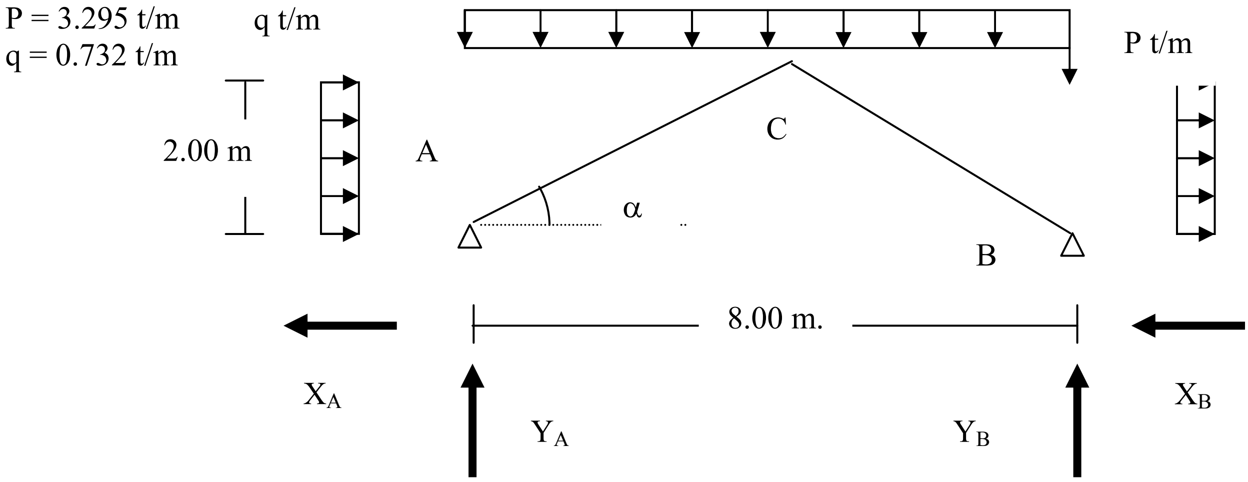
d) <u>CAPRIATA IPERSTATICA con azione sismica pari a condizioni di esercizio (c_s= 0,1)</u>

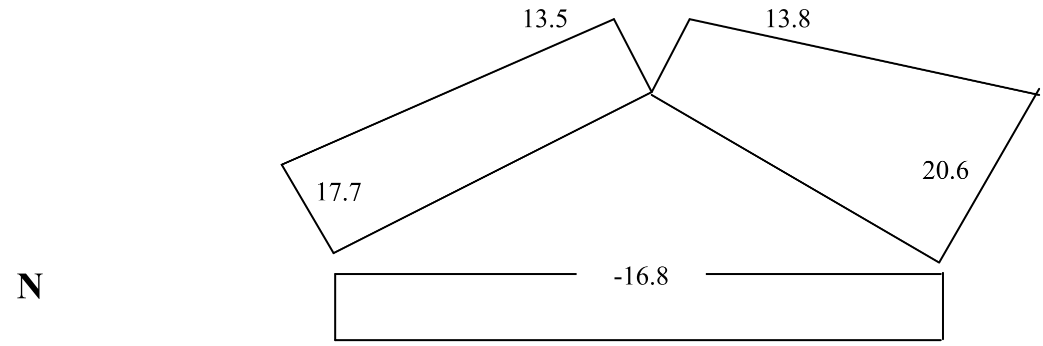
Come già accennato in precedenza, a titolo di confronto con il caso isostatico, era stato effettuato anche il calcolo iperstatico con un'azione sismica con coefficiente pari a 0.33 g.

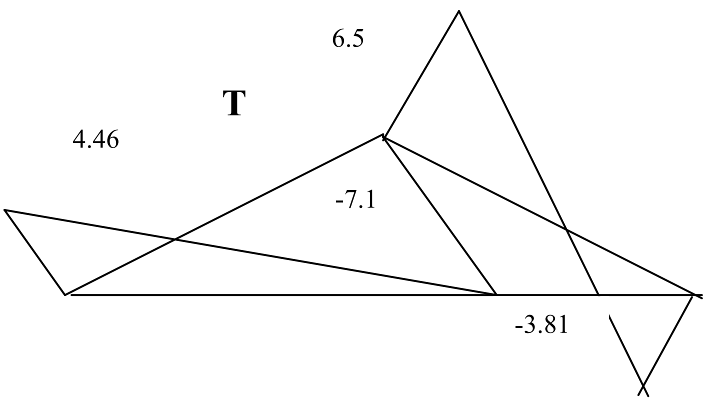
Queste condizioni di calcolo già riportate e rispecchianti esclusivamente il caso di verifica a rottura, sono qui confrontate con il caso di coefficiente sismico pari a 0.1 g.

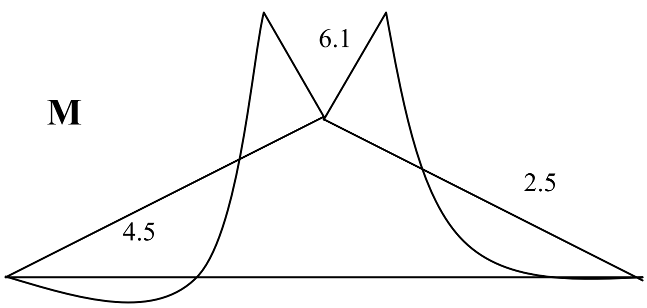
E' bene notare che i vincoli alla base (cerniere), sono considerate rigide e che le loro reazioni sono applicate al tirante cambiate di segno.

Questa semplificazione comporta un valore molto elevato dello stato tensionale dovuto appunto alla rigidezza del vincolo considerato invece elastico nel metodo degli elementi finiti.









e) ANALISI DELLA SICUREZZA

In prossimità del collasso per effetto del sisma sia i vincoli interni che esterni da iperstatici diventano realmente isostatici come nella precedente analisi grafica (A2).
La trazione della catena circa raddoppia al cambiare del verso del sisma o dell'ubicazione del vincolo d'appoggio che da cerniera si trasforma in carrello, vinto l'attrito, innescando il crollo.

Ciò si verifica per un fattore di sicurezza allo stato limite di scorrimento globale per la rottura locale (A.9) inferiore all'ordine di

$$\eta = \frac{\mathrm{tg}\varphi}{\mathrm{tg}\beta} = 1{,}3\ ;\ tg\beta = \frac{8{,}78}{12{,}01} = 0{,}73;\ tg\varphi = 1{,}3 \cdot 0{,}73 \approx 1{,}0;\ \varphi = 45°.$$

Si noti che alleggerendo il tetto si riducono le forze d'inerzia con sensibili riduzioni delle sollecitazioni ma l'angolo β e quindi il fattore di sicurezza η non cambiano per cui i ritegni sismici vincolari agli appoggi della capriata sono indispensabili in caso di terremoto.

Il calcolo isostatico ed iperstatico oltre ad evidenziare le finalità didattiche del ruolo della Statica e quello della Scienza delle Costruzioni, mette intrinsecamente in luce il ruolo della rigidezza dei vincoli nel passare dallo stato limite d'esercizio a quello ultimo.

Lo sforzo normale 7,7 di trazione $N_{AB} = 17{,}5\ t$ nella catena ed i momenti massimi valgono nelle mezzerie dei puntoni M_m = t ·m nel calcolo isostatico; il sisma C_s=0,33 indica una sensibile pressoflessione nei puntoni.

Nel caso invece iperstatico con i nodi tutti incastrati e gli appoggi fissi risulta:

$$N_{AB} = 20{,}9\ t$$

ed il momento massimo è nella sezione di colmo M_c = 6,6 t·m.

Se si aggiunge il monaco (asta centrale verticale) oltre a favorire l'incastro dei puntoni al colmo si possono inserire i saettoni (2 aste diagonali) in modo

da ripartire le sollecitazioni secondo la classica capriata reticolare usuale nelle Chiese.
Si noti che il monaco in assenza di sisma non è sollecitato mentre in presenza è un efficace presidio a smistare gli sforzi normali (come i monaci contemplativi , da cui il nome,che appaiono utili solo in caso di eventi gravi).
Se poi il monaco anziché essere staccato come usuale dalla catena viene ad essa vincolato, la capriata diventa oltremodo iperstatica con ulteriore riduzione delle sollecitazioni, peraltro non termiche, ed aumento della sicurezza.
La sicurezza va oltretutto valutata sia in termini di vita dell'opera, da cui l'importanza di progettare bene i particolari costruttivi dei nodi che costituiscono l'iperstaticità, sia in termini di rischio per la salvaguardia delle vite umane specie in caso di sisma, da cui l'importanza dei ritegni, già citata, ad esempio di legno, come si faceva anticamente, in modo da consentire piccoli spostamenti e con la base zancata inossidabile e fissata con malta compatibile nei muri d'appoggio che devono essere di ottima consistenza, o rialzati ai lati della base dei puntoni in modo da costituire una sella sia trasversale che longitudinale.